CONOCIMIENTOS PREVIOS

UNIDAD 1 FUNCIONES

SOLUCIÓN DE DESIGUALDADES LINEALES

Solucionar una desigualdad es hallar el intervalo donde la variable puede tomar sus valores para satisfacer la desigualdad.

Ejemplo 1: solución de una desigualdad lineal sencilla.

Resuelva $\frac{2}{3}x - 4 \leq \frac{1}{5} + 3x$

Primero escribamos en un lado de la desigualdad los términos que tienen la variable y en el otro lado, los términos independientes: $\frac{2}{3}x - 3x \leq \frac{1}{5} + 4$

Hagamos las operaciones indicadas en cada miembro de la desigualdad: $\frac{-7}{3}x \leq \frac{21}{5}$

Al dividir por $\frac{-7}{3}$ ambos lados de la desigualdad, se cambia el sentido de ésta (propiedad 8 de las desigualdades):

$$x \geq \frac{21}{5} \div \left(\frac{-7}{3}\right)$$

$$x \geq -\frac{9}{5}$$

Por tanto, la solución es el intervalo $\left[-\frac{9}{5}, \infty\right)$. Esto significa que cualquier valor que tome la variable en este intervalo satisface la desigualdad dada.

Ejemplo 2: solución de una desigualdad lineal compuesta.

Resolver $\frac{2}{7} < 2x - 1 \leq 6$

Esta desigualdad es equivalente a tener $\frac{2}{7} < 2x - 1 \quad \wedge \quad 2x - 1 \leq 6$

Resolvemos cada desigualdad por separado:

$$\frac{2}{7} + 1 < 2x \quad \wedge \quad 2x \leq 6 + 1$$
$$\frac{9}{7} < 2x \quad \wedge \quad 2x \leq 7$$
$$\frac{9}{14} < x \quad \wedge \quad x \leq \frac{7}{2}$$

Equivale a tener $\frac{9}{14} < x \leq \frac{7}{2}$, lo que en notación de intervalo es $\left(\frac{9}{14}, \frac{7}{2}\right]$

La desigualdad de este ejemplo se puede resolver de otra forma si usamos las propiedades de las desigualdades. Lo que se debe tener en cuenta es que lo que se haga para una parte de la desigualdad se debe hacer para las otras, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3: solución de una desigualdad lineal compuesta.

Resolver $-3 \leq \frac{3x + 8}{2} < 10$

Para empezar, podemos multiplicar toda la desigualdad por 2, para eliminar el denominador:

$$-3(2) \leq 3x + 8 < 10(2)$$
$$-6 \leq 3x + 8 < 20$$

Ahora podemos restar 8 en cada miembro de la desigualdad:

$$-6 - 8 \leq 3x < 20 - 8$$
$$-14 \leq 3x < 12$$

Y por último, dividimos por 3:

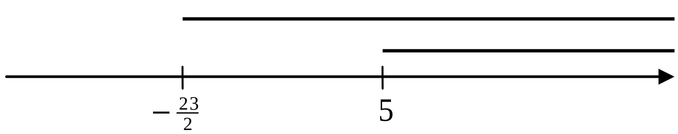
$\frac{-14}{3} \leq x < 4$ por lo que la solución es el intervalo $\left[-\frac{14}{3}, 4\right)$

Ejemplo 4: solución de una desigualdad lineal compuesta.

Resolver $14-3x > -5x-9 \quad \vee \quad 2x-1 > x+4$

Resolvemos cada desigualdad por separado, teniendo en cuenta las propiedades de las desigualdades:

$$14-3x > -5x-9 \quad \vee \quad 2x-1 > x+4$$
$$14+9 > -5x+3x \quad \vee \quad 2x-x > 4+1$$
$$23 > -2x \quad \vee \quad x > 5$$
$$-\frac{23}{2} < x \quad \vee \quad x > 5$$



La solución es la unión de los intervalos $\left(-\frac{23}{2}, \infty\right) \cup (5, \infty) = \left(-\frac{23}{2}, \infty\right)$

Ejemplo 5: solución de problemas

En un ascensor hay un letrero que dice "peso máximo 900 libras". Si un usuario que pesa 78 kilogramos desea subir al ascensor junto con varias cajas iguales que pesa cada una 1,5 kilogramos, calcule el número máximo de cajas que puede subir.

Llamemos *X* el número máximo de cajas que se puede subir al ascensor.

Como cada una pesa 1,5 kg, entonces el peso de todas las cajas es 1,5X.

Como se debe subir una persona de 78 kg junto con las cajas pero no exceder 900 libras (900 lb=450 kg), entonces podemos plantear la siguiente desigualdad:

$1{,}5x + 78 \leq 450$ que podemos resolver teniendo en cuenta las propiedades de las desigualdades:

$$1{,}5x + 78 \leq 450$$
$$1{,}5x \leq 450 - 78$$
$$x \leq \frac{372}{1{,}5}$$
$$x \leq 248$$

Por lo tanto, el número máximo de cajas que puede subirse al ascensor es de 248.

Ejemplo 6: solución de problemas

Para aprobar el curso de cálculo, cierto estudiante debe obtener un promedio de 3.0 o más. Si sus calificaciones son 2.5, 3.7, 2.0, 3,9, 1.2. Determine la calificación mínima que debe obtener en su último examen para aprobar el curso.

Tomemos X la última calificación.

El promedio es la suma de las seis notas dividida entre seis, y este debe ser mayor o igual que 3. Por lo tanto podemos establecer la siguiente desigualdad:

$$\frac{2.5 + 3.7 + 2.0 + 3.9 + 1.2 + x}{6} \geq 3$$

Al resolver, tenemos

$$\frac{2.5 + 3.7 + 2.0 + 3.9 + 1.2 + x}{6} \geq 3$$
$$13.3 + x \geq 18$$
$$x \geq 4.7$$

Así que la calificación mínima que el estudiante debe obtener es de 4.7.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE LA FORMA $|x| = A,\ \ A \geq 0$

En la solución de ecuaciones con valor absoluto de la forma $|x| = A,\ \ A \geq 0$, se buscan los valores que están exactamente a A unidades de distancia respecto del cero en la recta numérica. Se debe considerar la siguiente propiedad:

Si $|x| = A,\ \ A \geq 0$, entonces $x = A \quad \vee \quad x = -A$

Ejemplo 7: solución de ecuaciones con valor absoluto

Resolver $|2x+5| = 3$

$$\begin{aligned} &2x+5=3 \quad \vee \quad 2x+5=-3 \\ &2x=3-5 \quad \vee \quad 2x=-3-5 \\ &x=-1 \quad \vee \quad x=-4 \end{aligned}$$

Comprobemos:

$$\begin{aligned} &|2(-1)+5| = |-2+5| = |3| = 3 \\ &|2(-4)+5| = |-8+5| = |-3| = 3 \end{aligned}$$

Cada una de las soluciones da una distancia de 3 unidades respecto del cero en la recta numérica. El conjunto solución es {-1, -4}

Ejemplo 8: solución de ecuaciones con valor absoluto

Resolver $\left|x - \dfrac{2}{5}\right| = -10$

Como el valor absoluto de un número nunca es negativo, no existe solución para esta ecuación. El conjunto solución es { }.

Ejemplo 9: solución de ecuaciones con valor absoluto

Resolver $\left|4x-\frac{1}{7}\right|=0$

El único número real cuyo valor absoluto es igual a cero es el 0. Así la solución de esta ecuación es:

$4x-\frac{1}{7}=0$ lo que equivale a tener $x=\frac{1}{28}$

Ejemplo 10: solución de ecuaciones con valor absoluto

Resolver $\left|\frac{3}{7}-5x\right|=\left|2x-\frac{1}{6}\right|$

En los casos como el propuesto en este ejemplo, se tiene en cuenta que:

Si $|x|=|y|$, entonces $x=y \;\vee\; x=-y$

Así que

$$\begin{aligned}
\frac{3}{7}-5x=2x-\frac{1}{6} \quad &\vee \quad \frac{3}{7}-5x=-\left(2x-\frac{1}{6}\right)=-2x+\frac{1}{6}\\
\frac{3}{7}+\frac{1}{6}=2x+5x \quad &\vee \quad \frac{3}{7}-\frac{1}{6}=-2x+5x\\
\frac{25}{42}=7x \quad &\vee \quad \frac{11}{42}=3x\\
\frac{25}{294}=x \quad &\vee \quad \frac{11}{126}=x
\end{aligned}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{25}{294},\frac{11}{126}\right\}$

SOLUCIÓN DE DESIGUALDADES DE LA FORMA $|x|<A,\ A>0$

Propiedad: si $|x|<A,\ A>0$, entonces $-A<x<A$ (también es válido para $\leq$)

Ejemplo 11: desigualdades con valor absoluto

Resuelva $|3x+5|<2$

Apliquemos la propiedad: $-2<3x+5<2$

Restemos 5 en cada miembro: $-7<3x<-3$

Al dividir por 3, tenemos: $-\frac{7}{3}<x<-1$

Por lo tanto, la solución es el intervalo $\left(-\frac{7}{3},-1\right)$

Ejemplo 12: desigualdades con valor absoluto

Resolver $\left|\frac{2}{5}-x\right|<-4$

Como $\left|\frac{2}{5}-x\right|$ siempre será mayor o igual que cero, para cualquier número real x, esta desigualdad nunca puede ser verdadera. Por lo tanto la solución es el conjunto vacío: { }

En general, podemos afirmar que en toda desigualdad de la forma $|x|<0$, la solución es el conjunto vacío.

Ejemplo 13: desigualdades con valor absoluto

Resuelva $|6x-3|\leq 0$

Como $|6x-3|$ siempre será mayor o igual que cero, entonces solo debemos determinar el número con el que el valor absoluto sea igual a cero, haciendo que la expresión dentro del valor absoluto sea igual a cero y despejando x:

$$6x-3=0$$
$$x=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

La desigualdad será cierta sólo cuando $x=\frac{1}{2}$

Ejemplo 14: desigualdades con valor absoluto

Resuelva $\left|\frac{5x}{2}-1\right|\leq 4$

Apliquemos la propiedad: $-4\leq\frac{5x}{2}-1\leq 4$

Despejemos x:

$$-3\leq\frac{5x}{2}\leq 5$$
$$-6\leq 5x\leq 10$$
$$-\frac{6}{5}\leq x\leq 2$$

Por lo tanto, la solución es el intervalo $\left[-\frac{6}{5},2\right]$

SOLUCIÓN DE DESIGUALDADES DE LA FORMA $|x|>A$

Propiedad: si $|x|>A$ y $A>0$, entonces $x<-A \quad \vee \quad x>A$

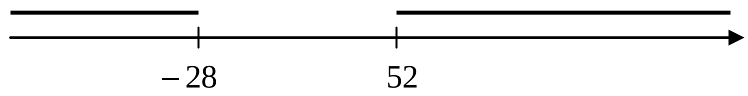
Ejemplo 15: solución de desigualdades con valor absoluto

Resuelva $\left|\frac{12-x}{4}\right|>10$

Aplicamos la propiedad: $\frac{12-x}{4}<-10 \quad \vee \quad \frac{12-x}{4}>10$

Resolvemos cada desigualdad:

$$
\begin{aligned}
12-x<-40 \quad &\vee \quad 12-x>40 \\
-x<-40-12 \quad &\vee \quad -x>40-12 \\
-x<-52 \quad &\vee \quad -x>28 \\
x>52 \quad &\vee \quad x<-28
\end{aligned}
$$



Por lo tanto la solución es $(-\infty,-28)\cup(52,\infty)$

Ejemplo 16: desigualdades con valor absoluto

Resuelva $|7x-9|+15>8$

Primero despejemos la expresión con valor absoluto:

$$
\begin{aligned}
|7x-9|&>8-15 \\
|7x-9|&>-7
\end{aligned}
$$

Como $|7x-9|$ siempre será mayor o igual que cero para cualquier número real x, entonces esta desigualdad es verdadera para todos los números reales. Por lo que la solución es el conjunto de todos los números reales **R.**

Ejemplo 17: desigualdades con valor absoluto

Resuelva $\left|\dfrac{4-9x}{4}\right|-6>2$

Primero despejemos el valor absoluto y luego apliquemos la propiedad

$$\left|\frac{4-9x}{4}\right| > 2+6$$

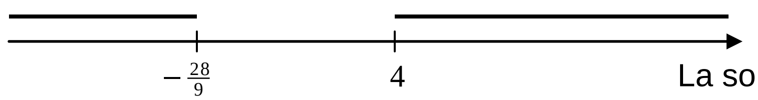
$$\left|\frac{4-9x}{4}\right| > 8$$

$$\frac{4-9x}{4} < -8 \quad \vee \quad \frac{4-9x}{4} > 8$$

$$4-9x < -32 \quad \vee \quad 4-9x > 32$$

$$-9x < -36 \quad \vee \quad -9x > 28$$

$$x > 4 \quad \vee \quad x < -\frac{28}{9}$$



La solución es $\left(-\infty, -\frac{28}{9}\right) \cup (4, \infty)$

SOLUCIÓN DE DESIGUALDADES NO LINEALES

Para resolver desigualdades no lineales, se recomienda:

1. De ser necesario, reescriba la desigualdad con todos los términos distintos de cero a un solo lado de la desigualdad (desiguale a cero).
2. Si el lado distinto de cero involucra cocientes, escríbalos con denominador común.
3. Factorice el lado distinto de cero de la desigualdad.
4. Determine el valor donde cada factor se hace cero y ubique estos valores en una recta numérica.
5. Determine los intervalos que se obtienen a partir del paso 4.
6. Utilice valores de prueba para establecer el signo de cada factor en cada uno de los intervalos.
7. Escriba el conjunto solución a partir de los signos del paso 6. Asegúrese de verificar si la desigualdad se satisface en los valores extremos de cada intervalo, en caso de que la desigualdad involucre los signos $\leq$, $\geq$

Ejemplo 18: solución de desigualdades cuadráticas

Resuelva $x^2 + x > 20$

Primero desigualemos a cero: $x^2 + x - 20 > 0$

Factoricemos: $(x+5)(x-4) > 0$

Los valores que hacen cero cada factor son, respectivamente, -5 y 4

Dibujemos una tabla con cada factor y en ella una recta numérica indicando los valores anteriores:

$x+5$			
$x-4$			
	-5	4	
Intervalos	$(-\infty,-5)$	$(-5,4)$	$(4,\infty)$

Tomemos valores de prueba en cada intervalo para establecer el signo de cada factor en cada intervalo y el signo del producto en cada intervalo.

$x+5$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
	-5	4	
Intervalos	$(-\infty,-5)$	$(-5,4)$	$(4,\infty)$
Signo de $(x+5)(x-4)$:	$+$	$-$	$+$

Como hay dos intervalos donde el producto es mayor que cero, entonces la solución de la desigualdad es $(-\infty,-5)\cup(4,\infty)$

Ejemplo 19: solución de una desigualdad racional

Resuelva $\dfrac{3x+1}{x+2} \leq 1$

Antes de resolver esta desigualdad, es importante anotar que NO es correcto multiplicar por el denominador, así $3x+1 \leq x+2$, porque no hay certeza de que el denominador sea positivo o negativo, con lo que se invertiría el signo de la desigualdad.

Es preferible primero desigualar a cero la expresión: $\dfrac{3x+1}{x+2}-1\leq 0$

Operemos el lado izquierdo: $\dfrac{2x-1}{x+2}\leq 0$

El numerador se hace cero en $x=\dfrac{1}{2}$ y el denominador en $x=-2$

En la siguiente tabla se muestran los signos de cada factor en cada intervalo formado por los valores anteriores. Además el signo del cociente en cada intervalo:

$2x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
	-2	$\frac{1}{2}$	
intervalos	$(-\infty,-2)$	$(-2,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\infty)$
Signo de $\dfrac{2x-1}{x+2}$	$+$	$-$	$+$

En el intervalo $(-2,\frac{1}{2})$ el cociente es menor que cero, no se puede tomar el valor de -2 (porque hace el denominador cero) y en $\frac{1}{2}$ el numerador es cero.

Entonces la solución de la desigualdad es el intervalo $(-2,\frac{1}{2}]$

Ejemplo 20: desigualdades no lineales con valor absoluto

Resuelva $|x^2-8x+14|\geq 2$

Apliquemos la propiedad: $x^2-8x+14\leq -2 \;\vee\; x^2-8x+14\geq 2$

Desigualamos a cero y resolvemos:

$$x^2-8x+14+2\leq 0 \;\vee\; x^2-8x+14-2\geq 0$$
$$x^2-8x+16\leq 0 \;\vee\; x^2-8x+12\geq 0$$
$$(x-4)^2\leq 0 \;\vee\; (x-6)(x-2)\geq 0$$

Como $(x-4)^2$ siempre es positivo para cualquier número real x, y el valor que la hace cero es 4, entonces la solución de la desigualdad del lado izquierdo es el conjunto unitario {4}

Para solucionar la desigualdad $(x-6)(x-2)\geq 0$, procedamos como se indicó en el ejemplo 18:

Los números que hacen cero cada factor son, respectivamente 6 y 2. En la siguiente tabla se muestran los signos de cada factor en cada intervalo formado por los valores anteriores. Además el signo del producto en cada intervalo:

$x-6$	$-$	$-$	$+$
$x-2$	$-$	$+$	$+$
	2	6	
intervalos	$(-\infty,2)$	$(2,6)$	$(6,\infty)$
Signo de $(x-6)(x-2)$	$+$	$-$	$+$

Hay dos intervalos donde se cumple la desigualdad y además debemos incluir los extremos de estos, por lo que la solución total de la desigualdad es: $\{4\}\cup(-\infty,2]\cup[6,\infty)$

Ejemplo 21: desigualdades no lineales con valor absoluto

Resuelva $\left|\dfrac{2-x}{3x-1}\right|\leq 1$

Apliquemos la propiedad: $-1\leq \dfrac{2-x}{3x-1}\leq 1$

Esta desigualdad compuesta es equivalente a tener $-1\leq \dfrac{2-x}{3x-1} \quad \wedge \quad \dfrac{2-x}{3x-1}\leq 1$

Cada una de estas desigualdades se debe resolver independientemente. De cada una se obtiene una solución cuya intersección (porque es el signo $\wedge$) dará la solución total del ejercicio.

$$-1\le \frac{2-x}{3x-1} \quad \wedge \quad \frac{2-x}{3x-1}\le 1$$

$$0\le \frac{2-x}{3x-1}+1 \quad \wedge \quad \frac{2-x}{3x-1}-1\le 0$$

$$0\le \frac{2-x+3x-1}{3x-1} \quad \wedge \quad \frac{2-x-3x+1}{3x-1}\le 0$$

$$0\le \frac{1+2x}{3x-1} \quad \wedge \quad \frac{3-4x}{3x-1}\le 0$$

Para cada desigualdad se construye una tabla indicando los valores donde el numerador y el denominador se anulan y los intervalos que estos producen:

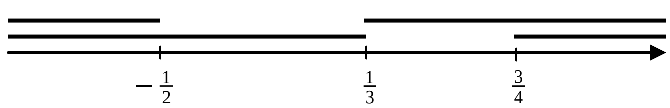
$1+2x$	$-$	$+$	$+$
$3x-1$	$-$	$-$	$+$
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3},\infty\right)$
$\frac{1+2x}{3x-1}$	$+$	$-$	$+$

S$_1$=$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{1}{3},\infty\right)$

$3-4x$	$+$	$+$	$-$
$3x-1$	$-$	$+$	$+$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	
	$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4},\infty\right)$
$\frac{3-4x}{3x-1}$	$-$	$+$	$-$

S$_2$=$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left[\frac{3}{4},\infty\right)$

Ahora, la solución total es la intersección $S_1\cap S_2$



$$S_1\cap S_2=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{4},\infty\right)$$

Notemos que el número $\frac{1}{3}$ no se puede tomar en ningún intervalo porque este hace cero el denominador.

Ejemplo 22: desigualdades no lineales con valor absoluto

Resuelva $\left|\frac{x^2+1}{x^2-2x-3}\right|\ge 1$

Apliquemos la propiedad: $\dfrac{x^2+1}{x^2-2x-3} \le -1 \quad \vee \quad \dfrac{x^2+1}{x^2-2x-3} \ge 1$

Cada una de estas desigualdades se debe resolver independientemente. De cada una se obtiene una solución cuya unión (porque es el signo $\vee$) dará la solución total del ejercicio.

$$\frac{x^2+1}{x^2-2x-3}+1 \le 0 \quad \vee \quad \frac{x^2+1}{x^2-2x-3}-1 \ge 0$$

$$\frac{x^2+1+x^2-2x-3}{x^2-2x-3} \le 0 \quad \vee \quad \frac{x^2+1-x^2+2x+3}{x^2-2x-3} \ge 0$$

$$\frac{2x^2-2x-2}{(x-3)(x+1)} \le 0 \quad \vee \quad \frac{2x+4}{(x-3)(x+1)} \ge 0$$

$$\frac{2\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{(x-3)(x+1)} \le 0 \quad \vee \quad \frac{2(x+2)}{(x-3)(x+1)} \ge 0$$

Para cada desigualdad se construye una tabla indicando los valores donde el numerador y el denominador se anulan y los intervalos que estos producen:

$$\frac{2\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{(x-3)(x+1)} \le 0$$

$x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	3	
	$(-\infty,-1)$	$\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},3\right)$	$(3,\infty)$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

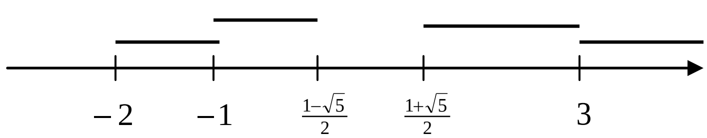
$S_1=\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},3\right)$

$$\frac{2(x+2)}{(x-3)(x+1)} \geq 0$$

$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
	-2	-1	3	
	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
	$-$	$+$	$-$	$+$

$S_2=[-2,-1)\cup(3,\infty)$

La solución total es la unión $S_1 \cup S_2$



$$S_1 \cup S_2 = [-2,-1)\cup\left(-1,\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2},3\right)\cup(3,\infty)$$

Notemos que los valores de -1 y 3 no se pueden incluir en la solución porque hacen que el denominador se anule.

Ejemplo 23: desigualdades no lineales con valor absoluto

Resuelva $\left|\frac{1}{x+2}\right| < \left|\frac{3}{x}\right|$

Para empezar, tengamos en cuenta que $x \neq -2 \quad \wedge \quad x \neq 0$

En estos casos donde la desigualdad incluye en cada miembro un valor absoluto, se pueden aplicar las propiedades del valor absoluto y de las desigualdades:

Elevemos ambos miembros al cuadrado:

$\left(\left|\frac{1}{x+2}\right|\right)^2 < \left(\left|\frac{3}{x}\right|\right)^2$ con este procedimiento se pueden cancelar los signos de valor absoluto y tomar cada factor al cuadrado:

$$\frac{1}{(x+2)^2} < \frac{9}{x^2}$$

Como los denominadores son mayores que cero, al trasponer los factores la desigualdad no cambia de sentido:

$$x^2 < 9(x+2)^2$$
$$x^2 < 9x^2 + 36x + 36$$
$$0 < 8x^2 + 36x + 36$$
$$0 < 4(2x+3)(x+3)$$

Construyamos la tabla correspondiente, como ya lo hemos indicado en los ejemplos anteriores:

$2x+3$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
		-3	$-\frac{3}{2}$
	$(-\infty,-3)$	$\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$
	$+$	$-$	$+$

La solución es la unión de los intervalos donde se cumple que el producto es positivo: $(-\infty,-3)\cup\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$

Ahora si consideramos que $x \neq 0$, entonces la solución es:

$$(-\infty,-3)\cup\left(-\tfrac{3}{2},\infty\right)-\{0\}$$

Ejemplo 24: desigualdades no lineales con valor absoluto

Resuelva $\left|\frac{3}{1-2x}\right| \geq \left|\frac{1}{2-x}\right|$

Tengamos en cuenta que $x \neq \frac{1}{2}, 2$

Elevemos ambos miembros al cuadrado para deshacer el valor absoluto:

$$\left(\frac{3}{1-2x}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{2-x}\right)^2$$

$$\frac{9}{(1-2x)^2} \geq \frac{1}{(2-x)^2}$$

Como los denominadores son positivos, podemos trasponer los factores y se conserva la desigualdad:

$$9(2-x)^2 \geq (1-2x)^2$$

$$36-36x+9x^2 \geq 1-4x+4x^2$$

$$5x^2-32x+35 \geq 0$$

$$(5x-7)(x-5) \geq 0$$

Construyamos la tabla correspondiente indicando los valores donde cada factor se anula y los intervalos que estos producen:

$5x-7$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
	$\frac{7}{5}$	5	
	$\left(-\infty,\frac{7}{5}\right)$	$\left(\frac{7}{5},5\right)$	$(5,\infty)$
	$+$	$-$	$+$

La desigualdad se cumple donde el producto es positivo:

Solución: $\left(-\infty,\frac{7}{5}\right)\cup(5,\infty)-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

EJERCICIOS

Determine el conjunto solución para cada desigualdad:

1. $2x+5<-7x+1$
2. $-\frac{3}{7}+x\le -\frac{4}{3}x-5$
3. $-9x+1\ge x+3$
4. $-\frac{2}{5}x-3>7-x$
5. $-13<2x+9\le 7$
6. $\frac{1}{4}\le \frac{3x-2}{2}\le 2$
7. $2-3x\le 5+x<4x-1$
8. $\frac{7}{4}+x\le 3x-1<x+9$
9. $x-\frac{2}{9}\le 2 \ \wedge \ 3x+1>-5$
10. $\frac{10-x}{3}\ge 5 \ \wedge \ -\frac{10}{7}>\frac{x}{12}+1$
11. $2x-13<1 \ \vee \ \frac{x}{3}+1\ge 3$
12. $4.7-2.5x<9.2 \ \vee \ 12.3>x-3.5$

Encuentre el conjunto solución de cada ecuación.

13. $\left|11x-\frac{1}{5}\right|=3$
14. $\left|\frac{4}{9}-\frac{2}{3}x\right|-\frac{2}{5}=\frac{3}{7}$
15. $\left|12+\frac{x}{5}\right|=-2$
16. $\left|-3x+1\right|=\left|x-1\right|$
17. $\left|5-\frac{3}{8}x\right|=\left|x+2.5\right|$
18. $\left|6-x\right|=-\left|x+3\right|$
19. $\left|\frac{x+4}{6}\right|=\left|\frac{x-2}{9}\right|$
20. $\left|6x-0.5\right|=2\left|4-x\right|$
21. $\left|2x-\frac{6}{13}\right|=0$
22. $\left|2-3x\right|=\left|\frac{x}{2}+3\right|$

Resuelva cada desigualdad. Utilice rectas numéricas para determinar el conjunto solución y de la respuesta en notación de intervalo.

23. $2x^2 + 5x \geq 3$

24. $x^2 - 6x < 0$

25. $x^2 - 64 \leq 0$

26. $\frac{x-3}{x+4} > 0$

27. $\frac{3x+4}{2x-1} \leq 0$

28. $\frac{x^2-4x-5}{x+3} < 0$

29. $\frac{x}{x^2+4x-21} \leq 0$

30. $\frac{2}{x-4} \geq 1$

31. $\frac{x-1}{3x+2} \leq -4$

32. $\frac{x}{5-3x} > -1$

33. $|6 - x| < 5$

34. $|x + 4| > 0$

35. $|7x - 2| \leq -3$

36. $|x + 4| \leq 7$

37. $|6 - x| < 4$

38. $|7x - 21| \geq 14$

39. $|4x + 5| + 6 \leq 10$

40. $|3x - 8| + 2 > 11$

41. $\left|\frac{5-2x}{3}\right| \geq 1$

42. $\left|\frac{5x-10}{6}\right| > \frac{5}{3}$

43. $\left|8 + \frac{x}{3}\right| > 0$

44. $\left|3x - \frac{4}{7}\right| + 9 < 4$

45. $|x - 11| + 6 < 2$

46. $|5x + 1| + 3 \geq -8$

47. $|4x + 15| - 6 \geq -6$

48. $\left|\frac{3-x}{x}\right| \leq 2$

49. $3 \leq \left|\frac{3x+4}{x-1}\right|$

50. $|x - 4| \geq |3x + 8|$

51. $\left|\frac{2}{9} - x\right| \leq |5x + 2|$

52. $\left|\frac{x-3}{3x+4}\right| > 6$

53. $\left|\frac{x+8}{2x-1}\right| \geq 3$

54. $\left|\frac{2}{x+3}\right| > \left|\frac{1}{x}\right|$

55. $\left|\frac{3}{2x+5}\right| < \left|\frac{5}{x-1}\right|$

56. Una constructora requiere cierto tipo de vidrio. Pide al fabricante que tenga, preferiblemente, 0.85 mm de grosor. Sin embargo, por los procesos de fabricación, el grosor puede variar en 0.03 mm respecto al grosor requerido. Si X representa el grosor real del vidrio, escriba una desigualdad que represente el rango del grosor requerido. ¿Cuál es el menor y cuál es el mayor grosor que se puede esperar?

57. El grosor de un tipo de madera para la construcción de paneles está garantizado en 2.5 pulgadas con un margen de error de 0.1 pulgadas. Si X representa el grosor real de la madera, escriba una desigualdad para representar el rango permitido y halle el menor y el mayor grosor.

58. La relación entre las escalas Celsius, C, y Fahrenheit, F, de temperatura está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Determine el intervalo en la escale Fahrenheit que corresponde a $85 \leq C \leq 120$. ¿Qué intervalo sobre la escala Celsius corresponde al rango de temperatura $75 \leq F \leq 98$?

59. La fuerza gravitacional F ejercida por la tierra sobre un cuerpo con una masa de 100 kg está dada por la ecuación $F = \frac{4.000.000}{d^2}$, donde *d* es la distancia (en km) desde el cuerpo al centro de la tierra, y la fuerza F se mide en newton (N). ¿Para qué intervalo de distancia la fuerza gravitacional estará entre 0,0004N y 0,01N?

60. Cerca de una fogata, la temperatura *T* en °C a una distancia de *x* metros del centro del fuego está determinada por $T = \frac{600000}{x^2+300}$. ¿En qué intervalo de distancias desde el centro de la fogata la temperatura es mayor que 500°C?

61. Las calificaciones de Camila en sus primeros cuatro exámenes son 87, 92, 70 y 75. Un promedio mayor o igual que 80 y menor que 90 le daría una nota final de B. ¿Cuál es el rango de calificaciones que debe obtener Camila en su quinto y último examen para obtener una calificación final de B? Suponga que la calificación máxima es 100.

62. Una compañía debe ensamblar 1000 artefactos electrónicos en una semana gastando no más de $6000 por concepto de mano de obra. Si el costo de mano de obra por ensamblar una unidad durante las horas diurnas es de $5 y $7 el de las nocturnas, ¿cuál es el mínimo número de artefactos que deben ser ensamblados en las horas diurnas?

63. Un recipiente de 750 cm^3 tiene forma cilíndrica con un radio interior de 5 cm. ¿Qué tan exacto debemos medir la altura h del agua en el vaso para estar seguros de tener tres cuartos de litro de agua con un error menor del 0.5%?

64. Una fábrica debe ensamblar 1000 aparatos electrónicos en una semana gastando no más de $8000 por concepto de mano de obra. Si el costo de mano de obra por ensamblar una unidad durante las horas diurnas es de $7 y $9 el de las nocturnas, ¿cuál es el mínimo número de artefactos que deben ser ensamblados en las horas diurnas?

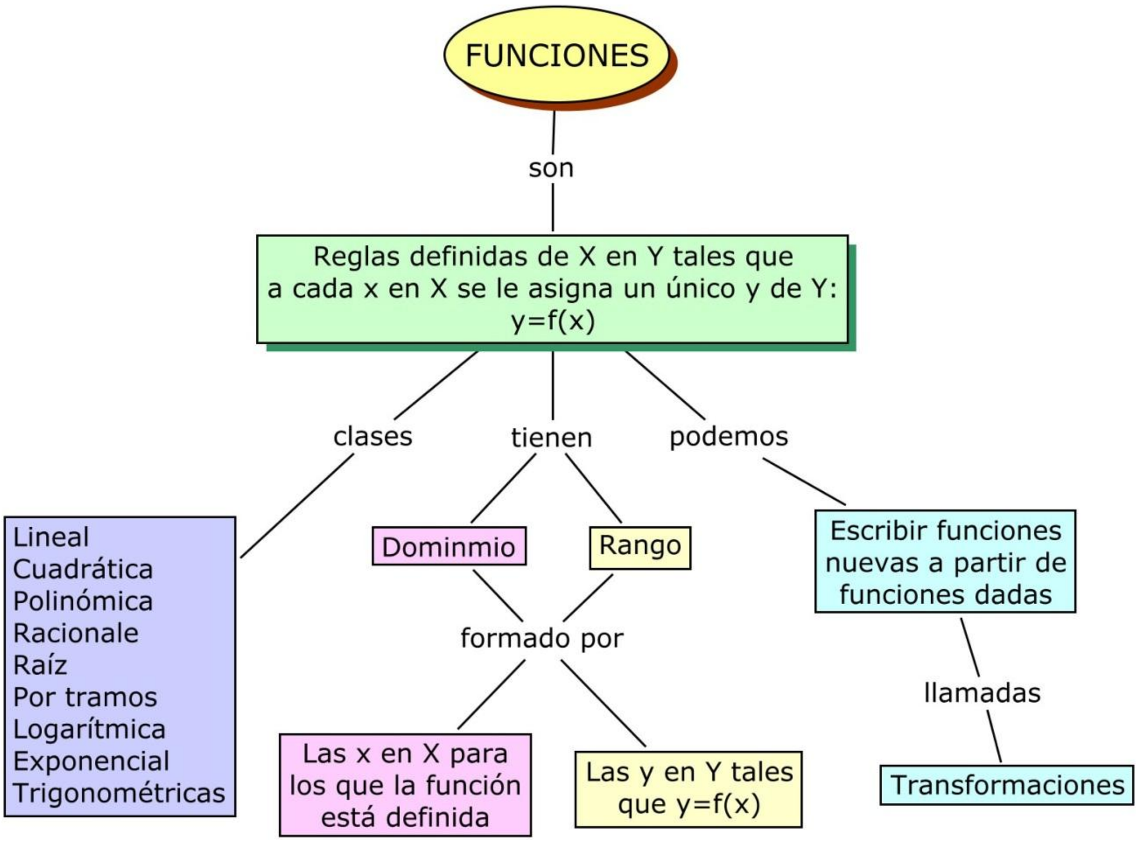
65. Un fabricante puede vender todas las unidades de un producto a $50 cada una. El costo C (en dólares) de producir x unidades cada semana está dado por $C = 40000 + 300x – x^2$. ¿Cuántas unidades deberán producirse y venderse a la semana para obtener alguna utilidad?

UNIDAD 1 FUNCIONES

PRESENTACIÓN

Estudiar Cálculo implica directamente estudiar funciones. El cálculo diferencial nos proporciona métodos para el estudio y análisis de funciones, las cuales constituyen una herramienta eficaz para resolver y comprender desde el punto de vista gráfico y analítico los fenómenos de la naturaleza, de los procesos físicos, el desarrollo de los avatares de la economía, los continuos avances en la ingeniería y la biología, entre otros, donde se nos exige el conocimiento de la modelación matemática.

En esta unidad se estudiará, no solo la definición de función real, sino también algunas clases de funciones con el análisis de su respectivo dominio, como tema de gran interés en el estudio de funciones, además se proponen situaciones problema que van dirigidos a la modelación de funciones.

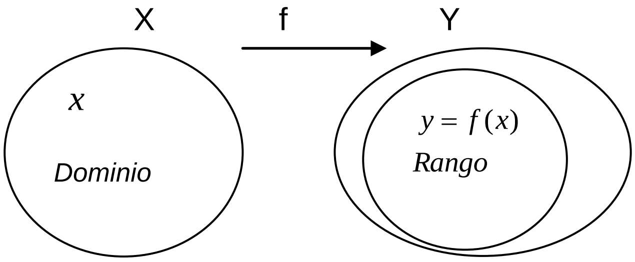


UNIDAD 1 FUNCIONES

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Sean X y Y conjuntos de números reales. Una función f es una regla que asigna a cada elemento $x \in X$ exactamente un elemento $y \in Y$, denotado $y = f(x)$.

El conjunto X de todos los números para los que la función está definida se llama **dominio** y el número f(x) se llama valor de la función f en el número x. El conjunto de todos los valores $y = f(x)$ se llama **rango** o **recorrido** de f.



y es la imagen de *x* bajo *f: y=f(x)*

Cuando las funciones están escritas como fórmulas x, a la x se le llama **variable independiente** y a la y **variable dependiente** porque este valor depende del valor que se elija para la x. La forma en que y varía está determinada por la regla con la que se ha definido la función.

UNIDAD 1 FUNCIONES

FUNCIÓN LINEAL

Una ecuación lineal de la forma $ax+by+c=0\ \ ,b\neq 0$ se puede escribir con la variable y despejada y obtendríamos una expresión equivalente

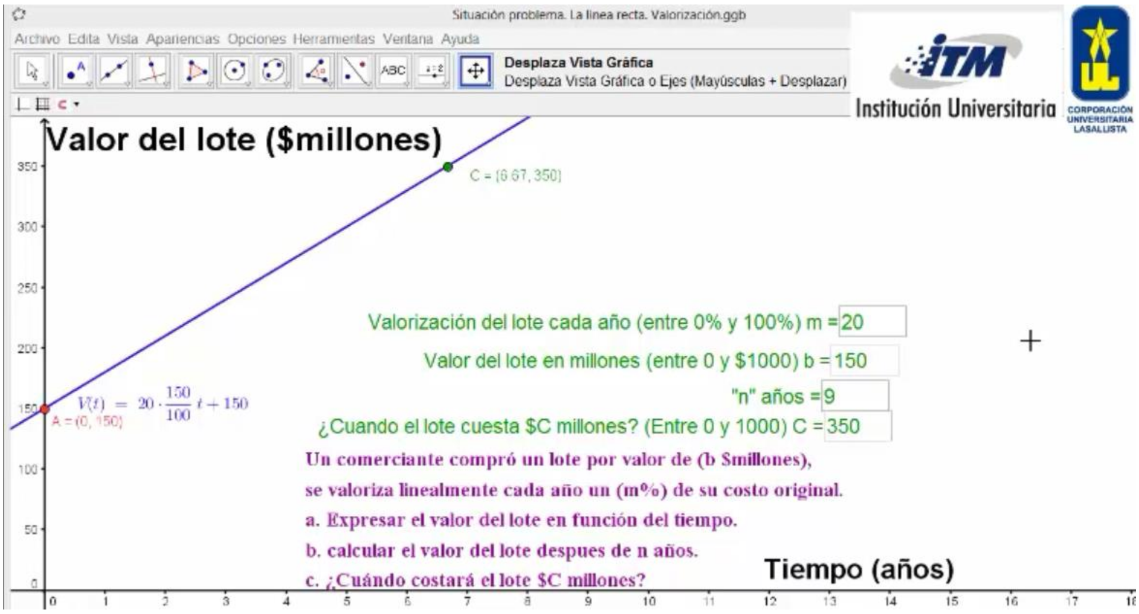
$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

Donde x es la **variable independiente** e y la **variable dependiente**. A esta expresión es a lo que se conoce como **Función Lineal.**

El dominio de la función lineal son todos los números Reales.

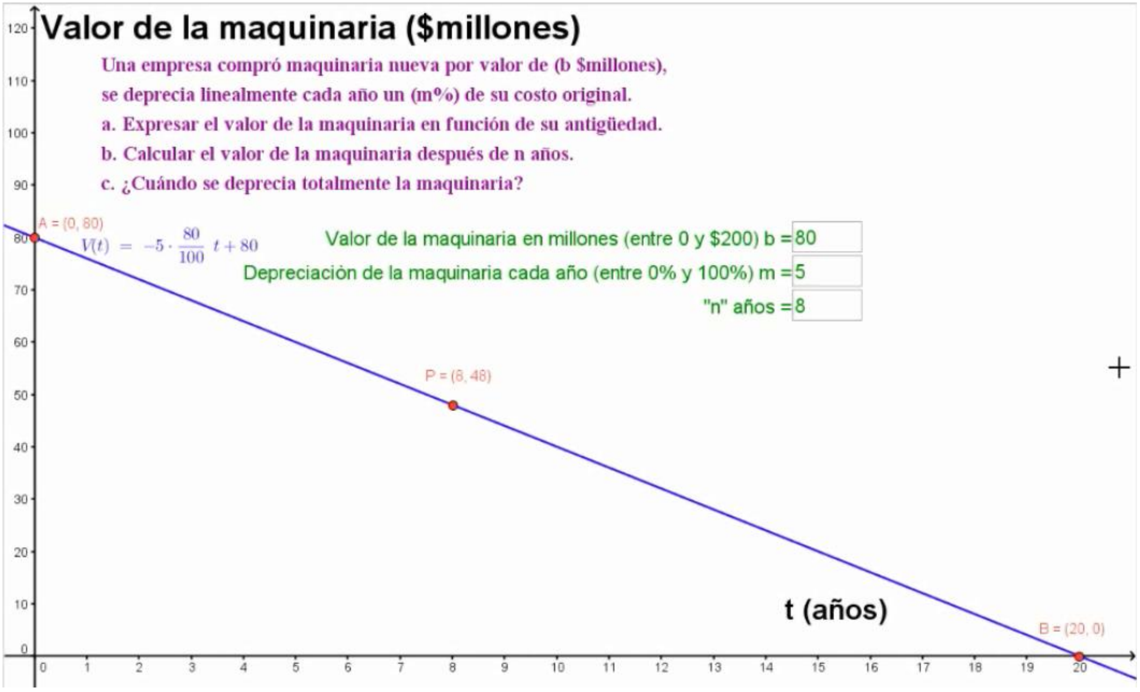
EJEMPLO:

Valorización y compra de un lote.



EJEMPLO:

Valor de la maquinaria que se deprecia.



UNIDAD 1 FUNCIONES

FUNCIÓN CUADRÁTICA

La fórmula $f(x) = x^2$ se conoce como función cuadrática y asigna a cada número real x su cuadrado x^2. Dado que todo número real se puede elevar al cuadrado, entonces el dominio de esta función es todo el conjunto R de los números reales. Pero como los cuadrados son siempre números positivos, entonces el rango de esta función es el conjunto de los reales positivos y el cero, es decir $y \geq 0$.

En general, toda función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ representa una función cuadrática y su gráfica corresponde a una parábola.

EJEMPLO:

Asistentes al teatro en un festival de cine de Cartagena (función cuadrática).

UNIDAD 1 FUNCIONES

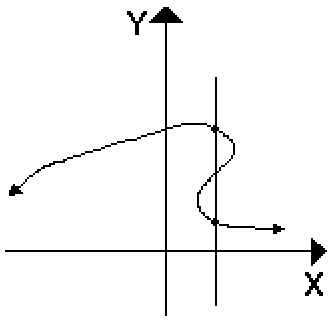
CRITERIO DE LA RECTA VERTICAL

Si conocemos una gráfica, podemos determinar si ella corresponde a una función o no usando el criterio de la recta vertical:

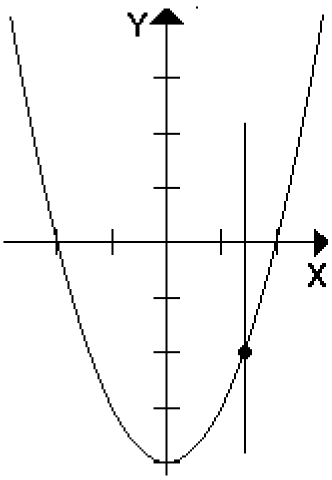
Si en cualquier parte de la gráfica es posible trazar una recta vertical que intersecte a más de un punto de la curva, la gráfica no representa una función. Si no es posible trazar una recta vertical que intersecte a más de un punto de la curva, la gráfica representa una función.

EJEMPLO

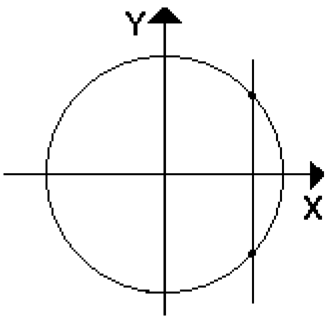
Con las siguientes gráficas se ha usado el criterio de la recta vertical para determinar si son o no funciones.



No es una Función



Si es una Función



No es una Función

UNIDAD 1 FUNCIONES

¿CÓMO HALLAR EL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN?

1. ***Si f es una función polinómica, el dominio está formado por todos los números reales:*** **R.**

EJEMPLO: dominio de una función polinómica.

Las siguientes funciones son funciones polinómicas y el dominio de cada una de ellas es **R**.

$$f(x) = 4x^3 + 2x - 1$$
$$g(x) = 1 - x^2$$
$$h(x) = \tfrac{3}{5}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 + 2$$

2. ***Si f es una función racional, es decir es de la forma*** $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$***, el dominio son todos los números reales tales que*** $Q(x) \neq 0$**.**

EJEMPLO: dominio de la función racional $f(x) = \dfrac{6-x}{2x+3}$

EJEMPLO: dominio de la función racional $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2+x-20}$

3. ***Si f es una función raíz de índice par, el dominio lo forman todos los números reales que hacen que la cantidad subradical sea una cantidad mayor o igual que cero*.**

EJEMPLO: dominio de la función raíz de índice par $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

EJEMPLO: dominio de la función raíz de índice par $f(x) = \sqrt{\dfrac{5x+3}{x-2}}$

4. ***Si f es una función raíz de índice impar, el dominio son todos los números reales donde la cantidad subradical esté definida.***

EJEMPLO: dominio de la función raíz de índice impar $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+5}}$

5. ***Si f es una función por tramos, es decir, definida por ecuaciones diferentes en diferentes partes de su dominio, entonces el dominio es la unión de los intervalos donde fue definida.***

EJEMPLO: hallar dominio, gráfica y rango de la función por tramos

$$f(x)=\begin{cases} 5x-1 & si\ \ -2\le x<0 \\ x & si\ \ 0\le x<3 \\ 2-x & si\ \ x\ge 3 \end{cases}$$

EJEMPLO: dominio de la función por tramos $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{x+3} & si\ \ x<0 \\ \sqrt{\dfrac{1}{x-1}} & si\ \ x\ge 0 \end{cases}$

6. ***Si f es una función logarítmica, el dominio está formado por todos los números reales que hacen del radicando una cantidad mayor que cero.***

Es importante recordar que por definición, la función logarítmica no está definida para cantidades menores o iguales que cero.

EJEMPLO: dominio de la función logarítmica $f(x)=Log_2(2x-3)$

EJEMPLO: dominio de la función logarítmica $f(x)=Ln\left(\frac{x-3}{x}\right)$

7. ***Si f es la función exponencial $f(x)=e^x$, el dominio es todo R. Si f es una función exponencial de la forma $f(x)=e^{g(x)}$, el dominio de f está determinado por el dominio de la función g(x)***

EJEMPLO: dominio de la función exponencial $f(x)=e^{\frac{x}{x+2}}$

EJEMPLO: situación problema donde se aplica la función exponencial con **cultivos de bacterias**

El número N de bacterias en un cultivo crece de tal forma que matemáticamente su modelo es $N(t) = 30 + 5e^{kt}$. Si a las t= 5 horas hay N= 3000 bacterias, Halle:

a. La constante K

b. La función exponencial del problema.

c. Determine el número de bacterias cuando han transcurrido t1= 4.5 horas

d. ¿Cuantas horas deben transcurrir para que el número de bacterias sean N1= 14000 ?

$$\{Condiciones\ iniciales: Si\ a\ las\ \ t\ \ horas\ hay\ \ N\ \ bacterias\}$$

$$k = 1.28 \Rightarrow N_1(t) = 30 + 5e^{1.28t_1}$$

UNIDAD 1 FUNCIONES

TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES

Si $y = f(x)$ representa una función, podemos obtener funciones nuevas a partir de desplazamientos, alargamientos o reflexiones de su gráfica.

A continuación se dan algunas transformaciones para la gráfica de la función $y = f(x)$, donde *c>0*

$y = f(x-c)$ se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ *c* unidades hacia la derecha

$y = f(x+c)$ se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ *c* unidades hacia la izquierda

$y = f(x)-c$ se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ *c* unidades hacia abajo

$y = f(x)+c$ se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ *c* unidades hacia arriba

$y = -f(x)$ se refleja la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje X

$y = f(-x)$ se refleja la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje Y

$y = -f(-x)$ se refleja la gráfica de $y = f(x)$ respecto al origen

$y = cf(x),\ c > 1$ se estira la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c

$y = \frac{1}{c} f(x),\ c > 1$ se comprime la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c.

$y = f(cx),\ c > 1$ se comprime la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c.

$y = f\left(\frac{1}{c} x\right),\ c > 1$ se estira la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c.

Poner aquí el video donde se muestren las transformaciones de las funciones: horizontales, verticales y reflexiones

UNIDAD 1 FUNCIONES

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si $f(x)=\dfrac{2-x}{3x+1}$ el dominio de esta función son todos los números reales tales que $3x+1\neq 0$

Al despejar el valor de la variable en esta expresión, tenemos $x\neq -\frac{1}{3}$

Por lo tanto el dominio de la función es: $R-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

2. Si $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+7x-18}$ el dominio está dado por todos los números reales tales que $x^2+7x-18\neq 0$

Es decir $(x+9)(x-2)\neq 0$, por lo tanto $x+9\neq 0$ y $x-2\neq 0$

Lo que es equivalente a decir $x\neq -9$ y $x\neq 2$

Entonces, el dominio de la función es: $R-\{-9,2\}$

3. Si $f(x)=\dfrac{x-3}{-x^2+2x-4}$, el dominio lo forman todos los números reales tales que $-x^2+2x-4\neq 0$, pero como esta expresión es un polinomio irreductible (se puede verificar con el discriminante de la ecuación cuadrática) podemos afirmar que nunca se hace cero. Así que el dominio lo forman todos los números reales.

4. Si $f(x)=\sqrt{x^2-4}$, entonces su dominio serán todos los números reales tales que $x^2-4\geq 0$

Esta desigualdad se resuelve como ya se explicó en la primera parte:

$(x+2)(x-2)\geq 0$

$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
	-2	2	
	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, el dominio de la función es $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

Para averiguar el rango, es suficiente con observar que la función $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ nunca es negativa, por lo tanto el intervalo $[0,\infty)$ corresponde al rango de la función.

5. Si $f(x)=-\sqrt{x^2+3x+9}$, el dominio serán todos los números reales tales que $x^2+3x+9\geq 0$. Pero, como este es un polinomio cuadrático irreductible que siempre es positivo para cualquier valor de la variable (porque el coeficiente de x^2 es positivo), entonces el dominio corresponde a todo **R.**

Para determinar el rango, observemos que la función $f(x)=-\sqrt{x^2+3x+9}$ siempre es negativa, por lo que su rango corresponde al intervalo $(-\infty,0]$.

6. Si $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+5}{x-1}}$ el dominio lo forman todos los números reales tales que $\dfrac{2x+5}{x-1}\geq 0 \;\wedge\; x-1\neq 0$

Para determinar este dominio, resolvamos la desigualdad

$2x+5$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
	$-\frac{5}{2}$	1	
	$\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)$	$\left(-\frac{5}{2},1\right)$	$(1,\infty)$
	$+$	$-$	$+$

El dominio de la función es $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right]\cup(1,\infty)$

7. La función $f(x)=\sqrt[3]{x+5}$ tiene por dominio todos los números reales

8. La función $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+5}}$ tiene por dominio todos los números reales excepto el número -5, es decir $D=R-\{-5\}$

9. El dominio de la función definida por tramos $f(x)=\begin{cases}5x-1 & si\;\; -2\leq x<0\\ x & si\;\; 0\leq x<3\\ 2-x & si\;\; x\geq 3\end{cases}$

es la unión de los intervalos donde está definida, $D=[-2,0)\cup[0,3)\cup[3,\infty)$

es decir, $D=[-2,\infty)$

10. Para hallar el dominio de la función $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{x+3} & si \;\; x<0\\ \sqrt{\frac{1}{x-1}} & si \;\; x>1\end{cases}$ es importante observar que el primer tramo está definido para todos los números reales negativos excepto para -3 y el segundo tramo está definido para todos los números reales mayores que 1. Por tanto el dominio de esta función está dado por $D=(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(1,\infty)$

11. En la función $f(x)=Log_2(2x-3)$ se debe cumplir que la cantidad $2x-3$ sea mayor que cero, o sea

$$2x-3>0$$

$$x>\frac{3}{2}$$

Por lo que el dominio es el intervalo $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$

12. El dominio de la función $f(x)=Ln\left(\frac{x-3}{x}\right)$ lo forman todos los números reales tales que $\frac{x-3}{x}>0$, es decir $(-\infty,0)\cup(3,\infty)$ lo que es equivalente a tener $R-[0,3]$

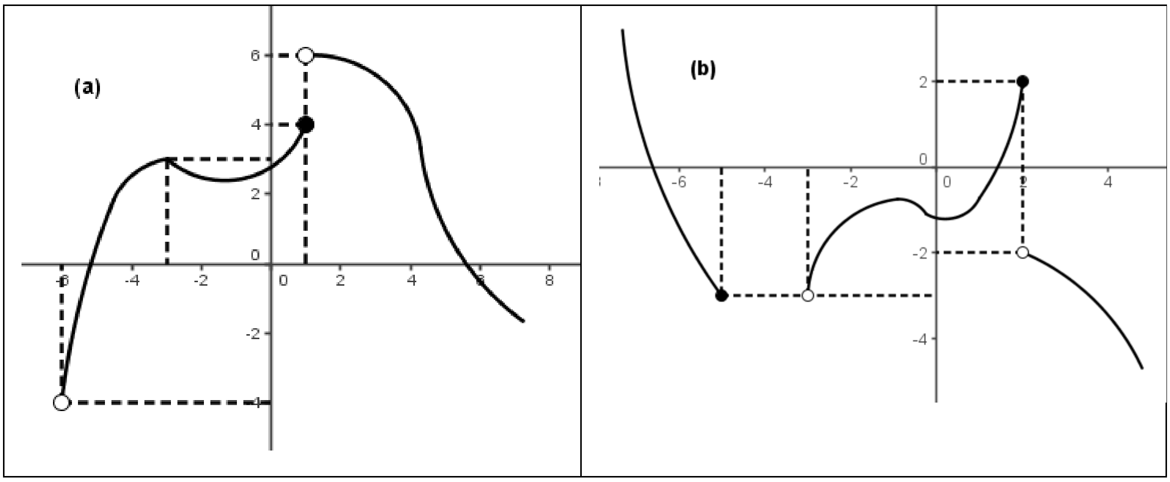
13. El dominio de la función $f(x)=e^{x+1}$ es **R**

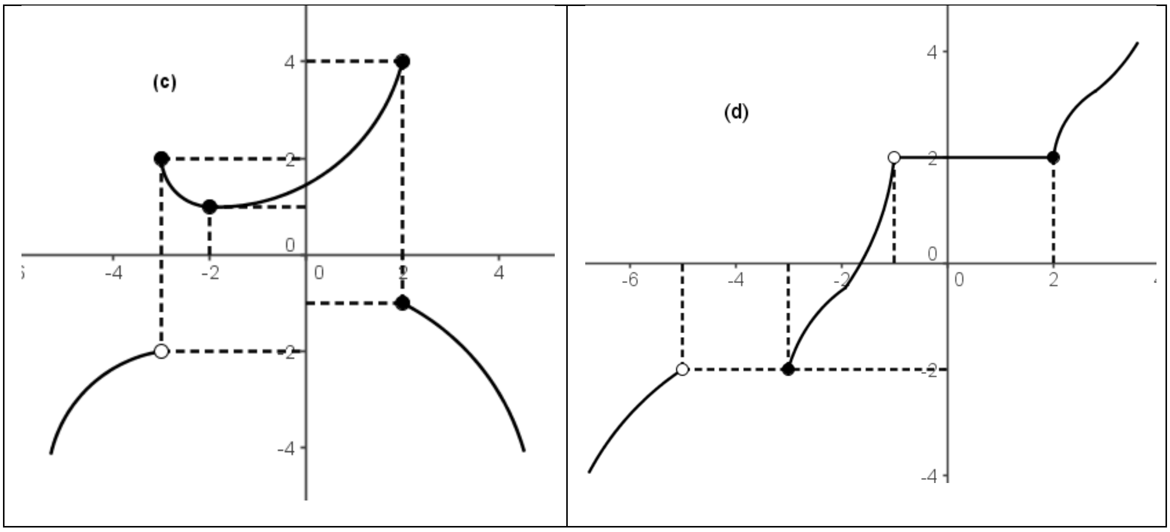
14. El dominio de la función $f(x)=e^{\frac{x}{x+2}}$ es **R-** {-2}, porque en x=2 el denominador del exponente se hace cero.

UNIDAD 1 FUNCIONES

EJERCICIOS PROPUESTOS

Dada la siguientes gráficas, indique el dominio y el rango. ¿Será relación o función? Si es función indique de que tipo.





Encuentre el dominio y el rango de la función dada.

1. $f(x) = 6 - 4x,\ -2 \le x \le 3$. **R/** $[-2, 3];\ [-6, 14]$

2. $g(x) = \dfrac{2}{3x-5}$ $\quad R/\ \{x / x \neq 5/3\} = (-\infty, 5/3) \cup (5/3, \infty); \quad \{y / y \neq 0\}$

3. h(x) = $\sqrt{2x-5}$ R/ $(5/3, \infty)$; $(0, \infty.)$

4. F(x) = $\sqrt{1-x^2}$ R/ $\{x / |x| \le 1\} = [-1, 1]$; $[0, 1]$

Encuentre el dominio de la función dada.

5. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$. R/ $\{x / x \ne \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

6. g(x) = $\sqrt[4]{x^2-6x}$ R/ $\{x / x \le 0\_o\_bien\_x \ge 6 = (-\infty, 0\ ] \cup [\ 6, \infty)\}$

7. $\varnothing(x) = \sqrt{\dfrac{x}{\pi - x}}$ R/ $[0, \pi)$

8. f(t) = $\sqrt[3]{t-1}$ R/ $(-\infty, \infty)$

Determine el dominio y trace la gráfica de la función dada.

9. $f(x) = 2$ **10.** $f(x) = x^2 + 2x - 1$ **11.** h(x) = $\sqrt{4-x^2}$ **12.** H(x) = $\|2x\|$ **13.** $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \ne 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **14.** $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < -1 \\ x, & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$	**15.** $f(x) = 3 - 2x$ **16.** g(x) = x^4 **17.** $f(x) = x/\|x\|$ **18.** $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2 \\ 1, & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ **19.** $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si } x \le -1 \\ x^2, & \text{si } x > -1 \end{cases}$ **20.** $f(x) = -x^2$	**21.** g(x) = $\sqrt{-x}$ **22.** G(x) = $\|x\| + x$ **23.** $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \le 0 \\ x+1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **24.** $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \le -1 \\ 3x+2, & \text{si } \|x\| < 1 \\ 7-2x, & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

En cada uno de los ejercicios siguientes obtenga una fórmula para la función descrita y determine su dominio.

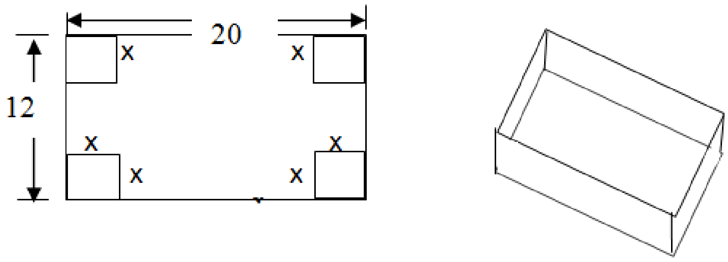
25. Un rectángulo tiene 20 m de perímetro. Exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados. R/ A (L)=10L –L².; 0<L<10

26. Exprese el área de un triángulo equilátero en función de la longitud de uno de los lados. R/ A(x)= $\sqrt{3}x^2/4, \quad x>0$

27. Una caja rectangular abierta con volumen de 2 m^3 tiene base cuadrada. Exprese el área de la superficie de la caja en función de la longitud de uno de los lados de la base. R/ S (x) = $x^2+(8/x)$. $x>0$

28. Con una hoja rectangular de cartón cuyas dimensiones son 12 pulg por 20 pulg, se van a construir una caja abierta recortando cuadrados iguales de lado ***x*** en cada una de las esquinas y luego doblando los bordes hacia arriba, como se ilustra en la figura. Exprese el volumen ***V*** de la caja en función de ***x***.

R/ V (x) = $4X^3-64x^2+240x$. $0<x<6$



29. Halle el dominio, grafique y halle el rango:

$$a.\quad f(x)=\begin{cases}\sqrt{25-x^2}, & si\quad -5<x\le 4\\ x+10, & si\quad x<-5\\ 6, & si\quad 4<x<6\\ 2, & si\quad x=6\\ x-10, & si\quad x>6\end{cases}$$

$$b.\quad g(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-25}, & si\quad x\le -5 \cup x\ge 5\\ \sqrt{9-x^2}, & si\quad -2\le x<3\\ 4, & si\quad -5<x<-3\\ x^2-12, & si\quad 3<x<5\end{cases}$$

$c.\quad h(x)=|x+5|$

$d.\quad k(x)=|x-3|+5$

$e.\quad m(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-1}+3x+2; \quad si \quad -5<x<-2 \cup 2\le x\le 5$

30. Una empresa compró maquinaria nueva por $50.000.000, se deprecia linealmente cada año un 10% de su costo original.

a) Expresar el valor de la maquinaria en función de su antigüedad

b) Calcular el valor de la maquinaria después de 4 años

c) Bosqueje la gráfica del costo de la maquinaria en función del tiempo.

d) Cuando la maquinaria se deprecia totalmente.

31. El costo de fabricar 10 bolsas de cartón al día es de $2000, mientras que fabricar 15 bolsas del mismo tipo al día cuesta $3000. Suponiendo que se trata de un modelo de costo lineal

a) Expresar el costo de fabricar x bolsas de cartón diariamente, en función del número de bolsas.
b) Halle el costo de fabricar 82 bolsas de cartón al día.

32. La temperatura medida en grados Farenheit (°F) tiene un cambio constante en relación con la temperatura medida en grados Celsius (°C). Si se sabe que 0°C son equivalentes a 32 °F y 100 °C son equivalentes a 212 °F

a) Hallar un modelo matemático que describa la relación entre °F y °C.

b) Convertir -15 °C a °F

c) Convertir 68 °F a °C

33. Un tanque contiene 50 litros de agua. A las 8:00 a.m. se abre una llave para llenarlo de tal forma que a la 1:00 p.m. hay en el tanque 1.250 litros de agua. Si se considera que la cantidad de agua que entra al tanque es constante y que la capacidad del tanque es de 2.000 litros,

a) ¿Cuántos litros de agua entran al tanque cada hora?

b) Hallar el modelo matemático que represente la situación

A partir del modelo matemático del numeral b., responder lo siguiente:

c) ¿A qué horas hay en el tanque 1.875 litros de agua?

d) ¿Cuánta agua habrá en el tanque a las 11:30 a.m.?

e) ¿Cuándo quedará lleno el tanque?

34. Entre 1980 y 2008, un coleccionista de libros raros compra libros para su colección a una tasa constante por año si en 1980 tenía 420 libros en 2000 tenía 1220 libros. Determinar

a) Una función que relacione el número de libros por año.

b) Calcule la cantidad de libros que tenía el coleccionista en 1993

c) En qué año tiene el coleccionista 1380 libros

35. Un tractor cuesta $120.000 y cada año se devalúa 8% de su precio original.

a) Encuentre una fórmula para el valor V de la maquina después de t años.

b) Determine el valor del tractor a los 5 años de realizada la compra.

c) ¿Cuándo se devalúa totalmente?

36. Una empresa de alquiler de lavadoras cobra $2.500 por llevar y recoger la máquina, más $1.300 por hora.

a) Escriba la fórmula del costo total de la renta para t horas.

b) Si usted dispone de $7.000, por cuánto tiempo puede arrendar la lavadora.

37. La producción de café en el municipio de Andes creció linealmente durante los años 1980 a 1991. En el año 1982 fue de 200.000 cargas y en 1987 de 370.000.

a) Escriba una ecuación que represente la producción de café durante el periodo en mención.
b) Indique cuál fue la producción en los años 1980 y 1991.

38. El ingeniero de una planta de fabricación de sillas encontró que a la planta le cuesta 22 millones de pesos fabricar 110 sillas en un día y 48 millones de pesos fabricar 300 sillas diariamente. Exprese el costo de producción C como función del número x de sillas producidas (Suponga que la relación es lineal). Indique la pendiente de la función y explique qué significa. Cuál es el intercepto con el eje vertical y qué significado tiene en el contexto dado.

39. La tasa de inflación, anual, en México durante el periodo comprendido entre 2001 a 2009, está dada por la función: $I(t) = 3t^2 - 14t + 19$

Donde, t representa el número de años desde 2001.

a) ¿En qué año la tasa de inflación será mínima?

b) ¿Cuál es la tasa mínima de inflación?

c) ¿Cuál es la tasa de inflación en 2005?

40. Un delfín toma impulso y salta por encima de la superficie del mar siguiendo la ecuación $\mathrm{y} = \mathbf{-t^2 + 6t + 12}$, donde y es la altura que alcanza cuando salta medida desde el nivel del mar (en metros) y t el tiempo empleado en segundos.

a) ¿Cuánto tiempo tarda el delfín en alcanzar la atura máxima, sobre el nivel del mar?

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el delfín sobre el nivel del mar?

41. Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 metros por segundo. La distancia s, en metros, del objeto al suelo después de t segundos, está dada por la ecuación $\mathrm{s(t)} = -4.9\mathrm{t}^2 + 20\mathrm{t}$ ¿Cuál es la altura máxima y cuándo la alcanza?

42. Durante el festival de cine de Cartagena la asistencia, en un día cualquiera, a las funciones, en cierto teatro, estuvo representada por el modelo $A(t) = -2\,t^2 + 16\,t + 50$, donde $A(t)$ representa el número de personas asistentes al teatro y t el tiempo trascurrido (en horas), a partir de las 11:00 a.m., hora en que abrió el teatro. De acuerdo a esta información, determinar

¿Cuántas personas habían en el teatro a las 11:00 a.m?

¿Cuál fue la asistencia máxima al teatro en ese día?

¿A qué hora se presentó la máxima asistencia?

43. La efectividad de un comercial de televisión depende de cuántas veces lo vea un televidente. Después de algunos experimentos una agencia de publicidad encuentra que si la efectividad E se mide en una escala de uno a diez, entonces, $E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}\,n^2$, donde n es el número de veces que un televidente ve un determinado comercial. Para que un comercial tenga efectividad máxima, ¿cuántas veces lo debe ver un televidente?

44. Juan tiene una venta de obleas en el Parque de Bolívar, realizando un estudio sobre el comportamiento de sus ganancias con la cantidad de obleas vendidas, se dio cuenta que sus ganancias seguían el siguiente modelo:

$$G(x) = -\frac{x^2}{2} + 60x - 600$$

Donde x representa el número de obleas vendidas y $G(x)$ las ganancias, de acuerdo con la información indique:

a) ¿Cuál es la ganancia máxima que Juan puede obtener?
b) ¿Cuántas obleas debe vender para tener la ganancia máxima?
c) ¿Cuántas obleas debe vender para librar la inversión y no tener pérdidas?

45. Simón vende confites en la universidad, realizando un estudio sobre el comportamiento de sus ganancias, se dio cuenta que sus ganancias seguían el siguiente modelo:

$$G(x) = -\frac{x^2}{4} + 16x - 60$$

Donde x representa la cantidad de confites vendidos y $G(x)$ las ganancias, de acuerdo con la información indique:

a) ¿Cuál es la ganancia máxima que Simón puede obtener?
b) ¿Cuántas confites debe vender para tener la ganancia máxima?
c) ¿Cuántos confites debe vender para librar la inversión y no tener pérdidas?

46. Un modelo para determinar el número $N(t)$ de personas del ITM que han escuchado cierto rumor t días después es $N(t) = 5\,(1 + e^{rt})$, si a los 3 días el rumor lo conocen 150 personas, determinar

a) ¿Cuántas personas han escuchado el rumor 10 días después?
b) ¿Cuál es el tiempo necesario para que el rumor lo conozcan 15000 personas?

c) ¿Cuántas personas comenzaron el rumor?

d) Si el I.T.M. tiene 27000 estudiantes, ¿Cuándo conocieron todos el rumor?

47. Un lago contiene cierta especie de pez. La población de peces t años después de colocarlos en el lago se modela mediante la función $P(t) = \frac{10}{1-4\,e^{k\,t}}$, 3 años después se contaron 20 peces, determinar

a) ¿Cuántos peces hay en lago 8 años después?

b) ¿Cuántos peces hay en lago 7 años después?

c) ¿Cuántos peces hay en lago 6 años después?

d) ¿Cuándo se estabiliza el número de peces en lago?, y ¿cuánto es ese número

de peces?

48. El número $\boldsymbol{N}$ de bacterias en un cultivo crece de tal forma que matemáticamente su modelo es: $N(t) = 100 + e^{2t}$ .Determine el número de bacterias depositadas inicialmente, justo antes de que comenzaran a reproducirse. ¿Cuántas horas deberán transcurrir para que el número de bacterias sea de 1500?

49. Se puede demostrar que la velocidad **V** de descenso de un paracaidista en un tiempo **t** después del lanzamiento se puede calcular como: $V(t) = 80\,(\,1 - \,e^{-\,0.2\,t})$ Donde t está dada en segundos y la velocidad en pies/seg.

a) A los 10 segundos del lanzamiento qué velocidad lleva el paracaidista?

b) En qué momento tiene una velocidad aproximada de 26.37 pies/seg?

50. Con los datos del censo de Colombia del siglo XX, la población de Bogotá puede modelarse mediante

$$P(t) = \frac{19.875}{1 + 57.993e^{-0.035005t}}$$

Donde P es la población en millones y t es el número de años desde 1800. Con base es este modelo:

a) ¿Cuál será la población en 2010?
b) ¿En qué año la población será de 15 millones?

51. A medida que un obrero adquiere más experiencia en su trabajo, la producción diaria aumenta hasta alcanzar una máxima. Supóngase que el n-ésimo día de trabajo, el número $f(n)$ de artículos producidos se calcula mediante el modelo $f(n) = 3 + 20\,(1 - e^{-0.1n})$

a) ¿Cuál es el número de artículos producidos el día quinto?

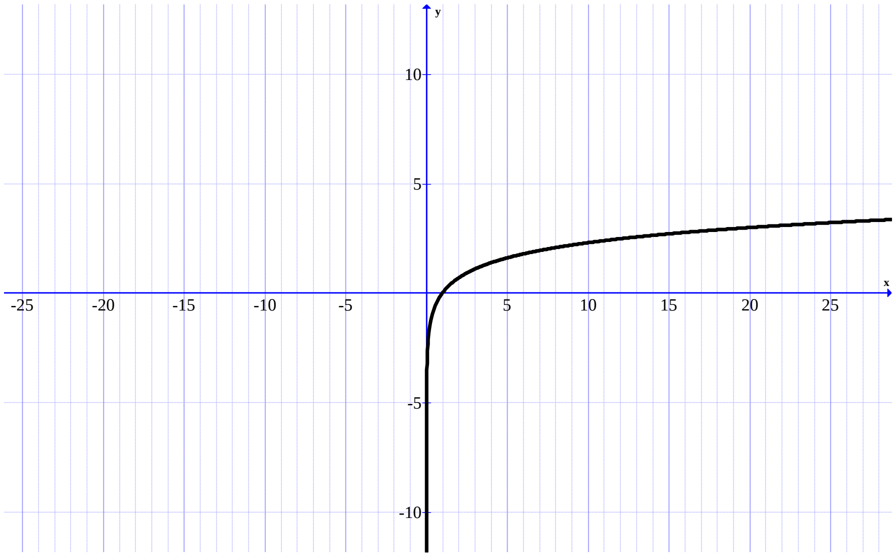
b) ¿A los cuántos días produce el obrero 22 artículos?

52. En un laboratorio de Biotecnología se tiene un cultivo de bacterias en un fermentador durante 4 horas. La población de bacterias crece rápidamente con el paso del tiempo. La función que relaciona la cantidad de bacterias y el tiempo t transcurrido en horas **C (t) =** $\mathbf{25\ e^{t}}$

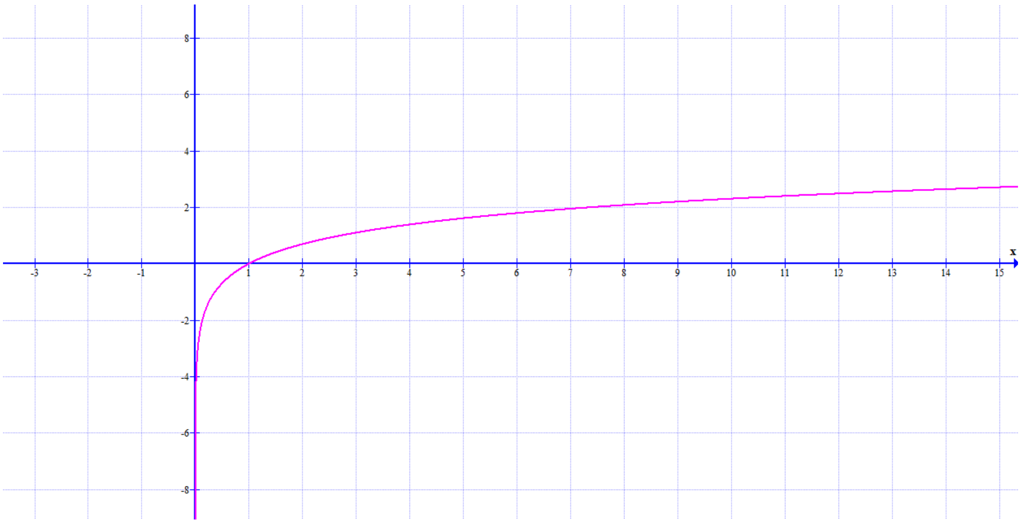
a) Determine en cuanto se incrementa la población en 3 horas

b) ¿Cuándo habrá una población de 1000 bacterias?

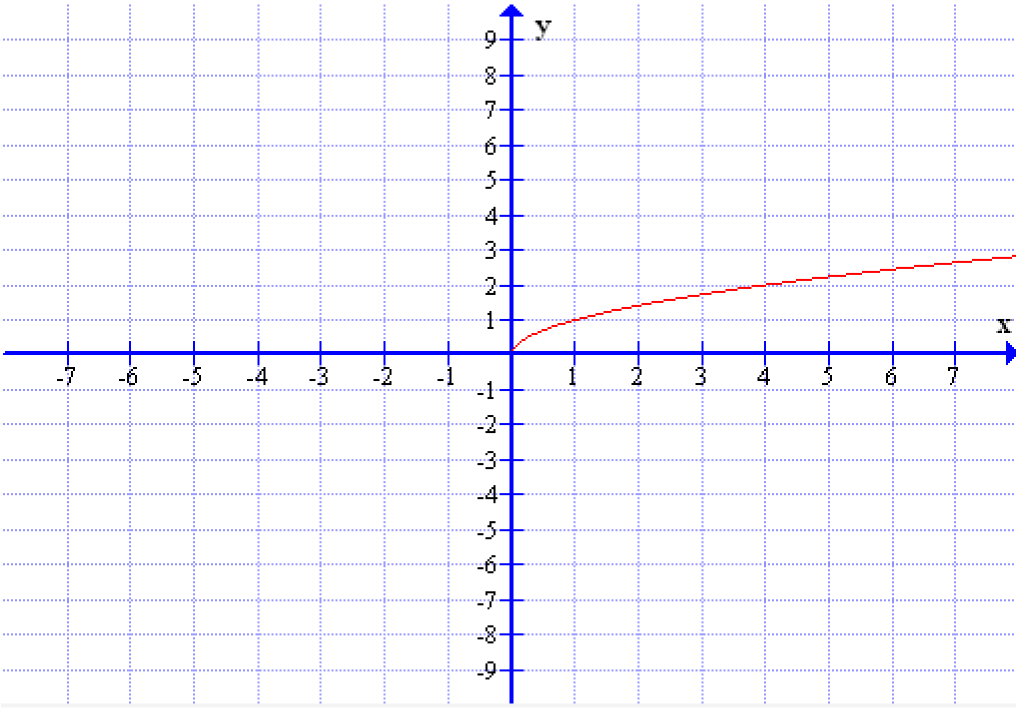
53. Utilizar la gráfica de $y = \ln x$ dada a continuación, para realizar la gráfica de $y = 5 + \ln(x + 10)$ Mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.



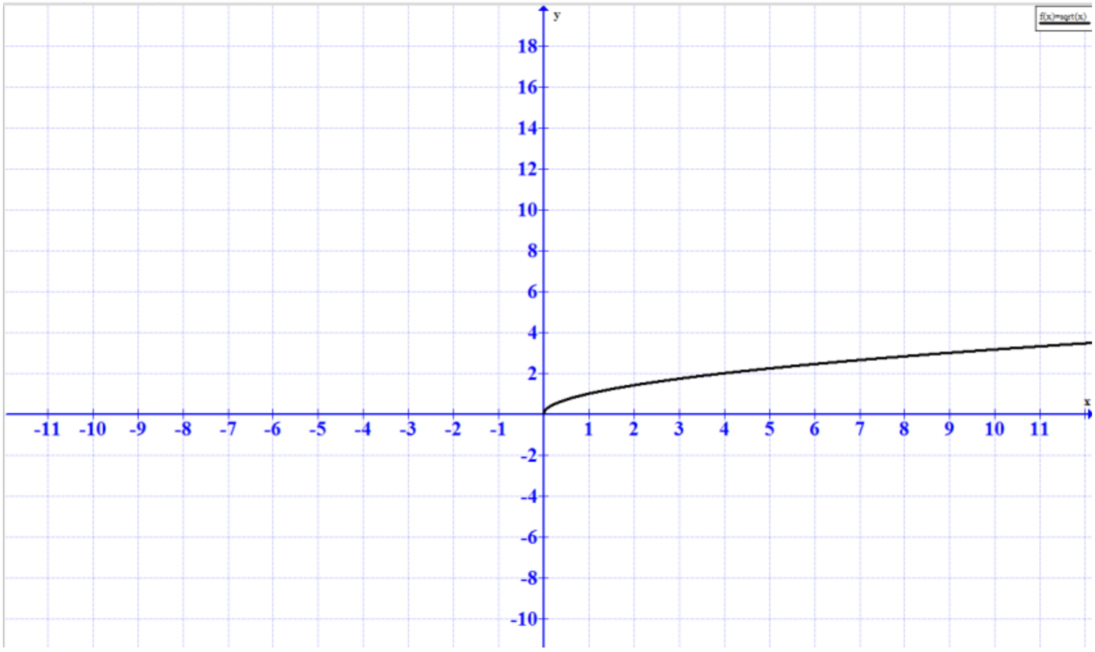
54. Utilizar la gráfica de $y = \ln x$ dada a continuación, para realizar la grafica de $y = -\ln x + 1$, mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.



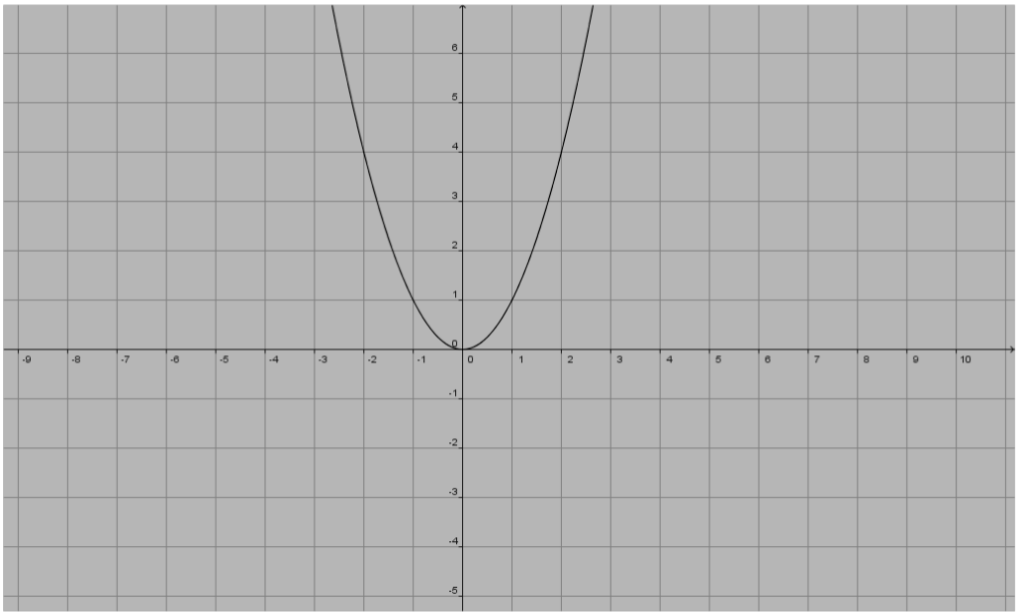
55. Utilizar la gráfica de $y = \sqrt{x}$ y las transformaciones de funciones para realizar el gráfico de $y = \sqrt{x+3} - 1$



56. Utilizar la gráfica de $y = \sqrt{x}$ dada a continuación, para realizar la grafica de $y = \sqrt{3 - x} + 2$, mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.

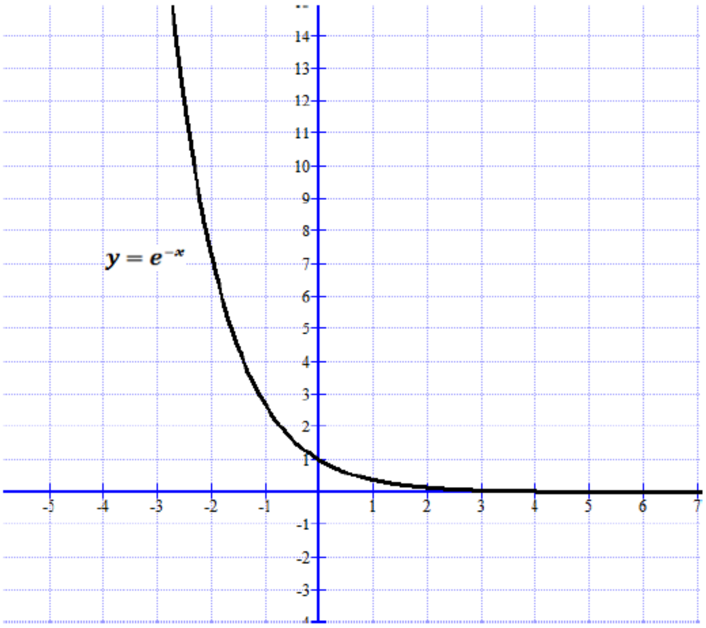


57. Explique los tipos de transformaciones que deben realizarse a partir de la función $y = x^2$ para obtener la función $y = 5 - (x+3)^2$. **Bosqueje** esta última.



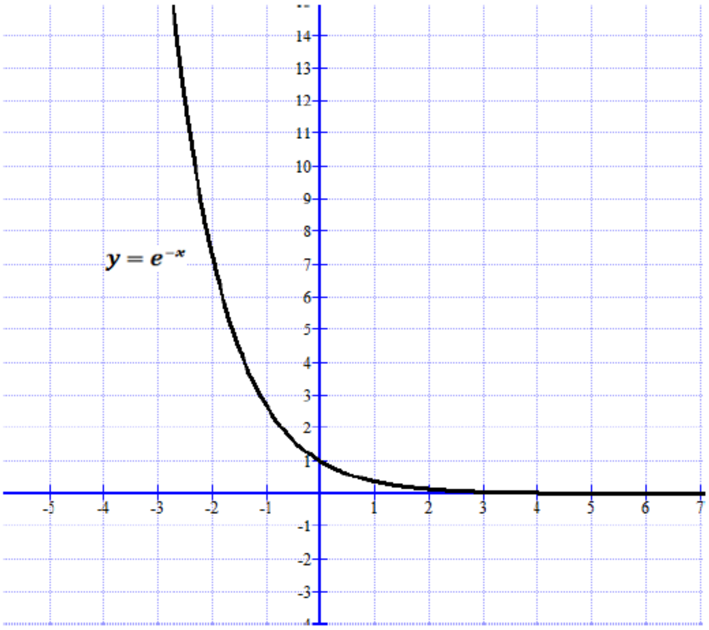
58.

IV. Utilizar la grafica de $y = e^{-x}$ dada a continuación, para realizar la grafica de $y = e^{-x-2} - 3$ mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.



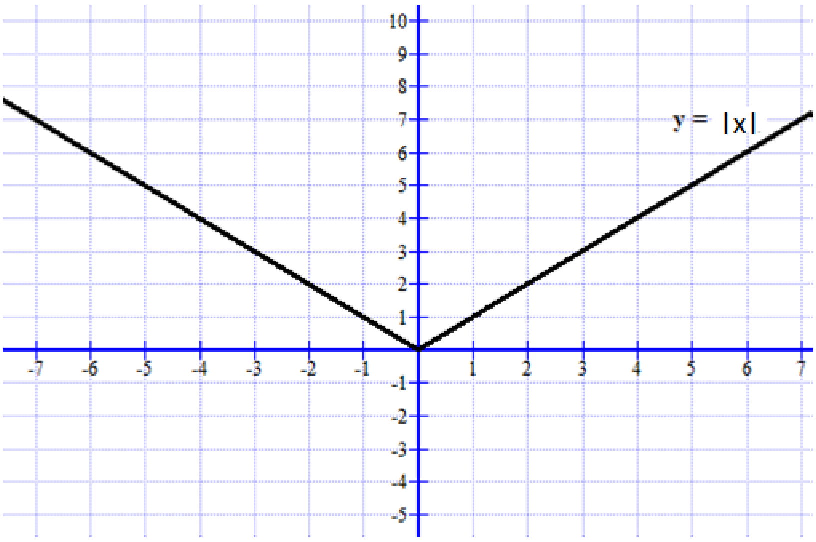
59.

IV. Utilizar la grafica de $y = e^{-x}$ dada a continuación, para realizar la grafica de $y = e^{x-2} - 1$ mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.

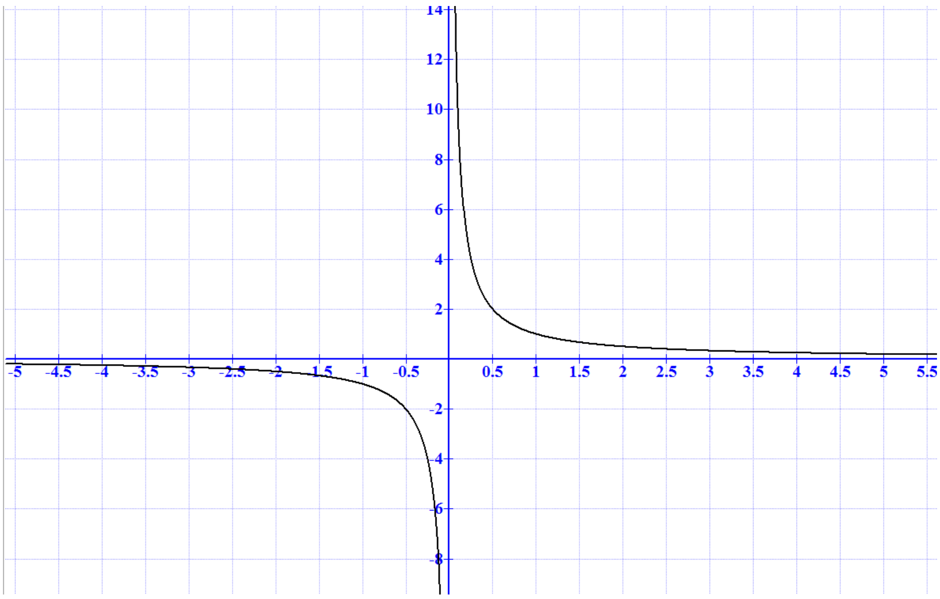


60. Utilizar la gráfica de $y = e^{x}$ dada a continuación, para realizar la gráfica de $y = 5 - e^{x+5}$ mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.

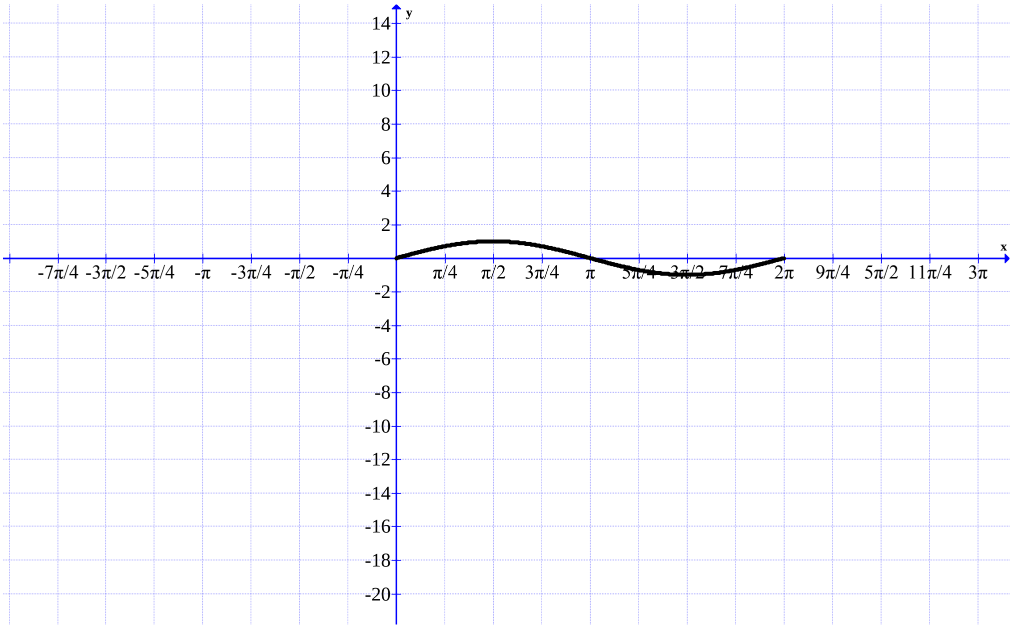
61. Utilizar la gráfica de $y = |x|$ dada a continuación, para realizar la grafica de $y = |x - 3| + 2$, mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.



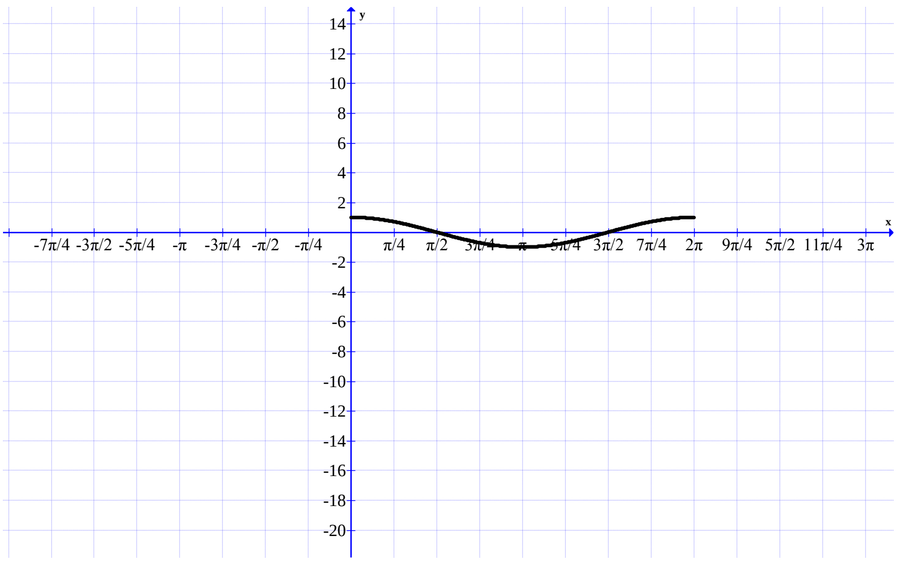
62. Utilizar la gráfica de $y = 1/x$ dada a continuación, para realizar la gráfica de $y = \frac{1}{x-2} + 3$ mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.



63. Utilizar la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ dada a continuación, para realizar la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.



64. Utilizar la gráfica de $y = \cos x$ dada a continuación, para realizar la gráfica de $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.



AUTOEVALUACIÓN DE FUNCIONES

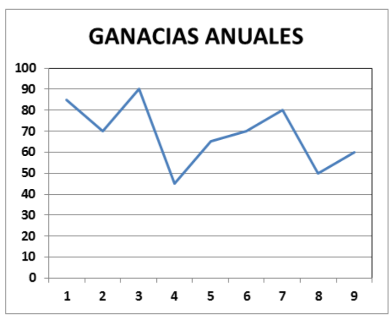
Evaluación y validación

A. Recordemos que una función lineal se puede definir si se conocen dos de sus puntos de coordenadas $A(x_1, y_1) y\ B(x_2, y_2)$ mediante la expresión: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. La siguiente tabla de valores representa algunos de los pares ordenados que hacen parte de una función lineal:

x	-9	1	-5	-1	-7	-3
y	-4	1	-2	0	-3	-1

1. ¿Cuál de los siguientes pares ordenados pertenecen a dicha función?
   a. $(4,3)$
   b. $\left(-5, -\frac{9}{2}\right)$
   c. $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$
   d. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

B. El grafico presenta las ganancias en millones de dólares de una empresa importadora durante un periodo de nueve años:



2. En la mitad exacta de ese periodo la empresa obtuvo:
   a. Una ganancia de 5 millones más que la obtenida 12 meses atrás
   b. Una ganancia de 60 millones con respecto a la obtenida 6 meses antes
   c. Una disminución de 5 millones con respecto a la obtenida 12 meses antes
   d. Una ganancia de 20 millones

C. Las siguientes relaciones expresan el número de visitantes (en unidades de mil) a un museo durante determinado año:

$$M = \{(2004,5), (2005,7), (2006,9.5)(2007,8)(2008,7)(2009,6.5)(2010,8)(2011,10)\}$$

$$N = \{(2004,7), (2005,7), (2006,9.5)(2007,8)(2008,7)(2004,6.5)(2010,8)(2011,10)\}$$

$$Q = \{(2007,5), (2008,7), (2009,9.5)(2010,8)(2011,7)(2012,6.5)(2013,8)(2011,8.2)\}$$

$$R = \{(2005,5), (2006,7), (2007,9.5)(2008,8)(2009,7)(2010,6.5)(2011,8)(2013,10)\}$$

3. De acuerdo a lo anterior:
    a. Son funciones las relaciones M y N
    b. Son funciones las relaciones M y Q
    c. Son funciones las relaciones M, Q y R
    d. Son funciones las relaciones N, Q y R

D. En un criadero de tilapias y de mojarras (variedades de peces) los administradores han establecido que si alimentan cierta cantidad fija de peces con $45\,kg$ de alimento diario se obtienen durante un mes $1300\,kg$ de carne para surtir los supermercados y, si dichos peces son alimentados con $55\,kg$ de alimento se obtienen $1450\,kg$ de carne para suplir la necesidad de sus clientes de supermercado.

4. De acuerdo a lo anterior:
    a. Si los peces se alimentan con $120\,kg$ se obtienen 3900 kg de carne
    b. Si los peces se alimentan con $120\,kg$ se obtienen 3575 kg de carne
    c. Si los peces se alimentan con $120\,kg$ se obtienen 3775 kg de carne
    d. Si los peces se alimentan con $120\,kg$ se obtienen 2425 kg de carne

E. Una empresa de alquiler de automóviles A cobra $ 10000 por cada kilómetro recorrido por el auto alquilado, otra empresa B del mismo tipo cobra un depósito de $50000 para entregarle un automóvil pero cobra $ 8000 por cada kilómetro recorrido por el automóvil entregado al cliente.

5. De acuerdo a lo anterior:
    a. Es indiferente alquilar el automóvil con A o con B cuando se recorren $50\ km$
    b. Es indiferente alquilar el automóvil con A o con B cuando se recorren $40\ km$
    c. Es indiferente alquilar el automóvil con A o con B cuando se recorren $25\ km$
    d. Es indiferente alquilar el automóvil con A o con B cuando se recorren $30\ km$

F. Dadas dos funciones y su intervalo, determine el dominio de la operación indicada:

6. $f(x) = 3\,Cos\,(3x) + 2; \left(0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\right) + g(x) = Sen\,(2x); \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\right)$
7. $f(x) = Cos\,(3x - 2); (-\pi \leq x \leq \pi)\ divida\ por\ g(x) = Sen\,(2x): \left(x \geq \frac{\pi}{3}\right)$
8. $f(x) = Cos\,x - 3; \left(0 \leq x \leq \frac{5\pi}{3}\right) * g(x) = 2\,Sen\,(3x); (-\pi \leq x \leq \pi)$

Evalué la expresión dada:

9. $\boldsymbol{f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(Sec(-x) - Cos\left(\frac{9x}{2}\right)\right)}$
10. $\boldsymbol{f\left(\frac{\pi}{4}\right) = Cot\left(\frac{8x}{3}\right) + sen\left(\frac{21x}{12}\right)}$
11. $\boldsymbol{f(\pi) = 2\,Csec\left(-\frac{11x}{3}\right) - Tan\left(\frac{x}{3}\right)}$
12. $\boldsymbol{f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = Csec\left(\frac{28x}{9}\right) \div Sen\left(\frac{5x}{3}\right)}$

Función lineal. Con el apoyo de tu calculadora encuentra el valor de pendiente de las funciones lineales que forman el ángulo expresado con el eje de las abscisas:

13. $\emptyset = \frac{\pi}{3}$

14. $\emptyset = \frac{5\pi}{4}$
15. $\emptyset = \frac{7\pi}{4}$
16. $\emptyset = \frac{5\pi}{6}$
17. $\emptyset = \frac{13\pi}{6}$

<u>Función exponencial</u>. Dada la función exponencial describe las características de la misma:

18. Se tiene $f(x) = 5^x$ ¿Cuál es el punto de corte de la gráfica con los ejes?
19. Dadas las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = 5^x$ se pregunta: ¿qué tienen de común las gráficas de ambas funciones? ¿qué tienen de diferente las mismas graficas?
20. ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian todas las gráficas de $f(x) = p^x$?
21. ¿De qué manera influye el signo de p en la gráfica de $f(x) = p^x$? ¿Y su valor absoluto?
22. Dadas las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = 5^x$ se pregunta: ¿qué tienen de común las gráficas de ambas funciones? ¿qué tienen de diferente las mismas graficas?

<u>Función logarítmica</u>. Halle el valor de la función y realice un esquema aproximado de la misma.

23. $f(x) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}}$
24. $f(2) = \log_{\frac{1}{2}} x$
25. $f(-3) = \log \frac{x}{1000}$
26. $f(6) = \log_{\sqrt{5}} x$
27. $f(-5) = ln \frac{1}{e^x}$

<u>Formulación y ejecución</u>

Establecer el dominio y el rango de las siguientes funciones:

28. $f(x) = \sqrt{3x + \sqrt{3}}$
29. $g(x) = \sqrt{x^2 - 8}$
30. $h(x) = \frac{x+1}{x^3-5x}$
31. $k(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-2}}$
32. $l(x) = \sqrt{\frac{x^2-6}{x^2+3}}$

Evalué la función dada: (Formulación y ejecución)

33. $f(3) = \sqrt[3]{\frac{3x-4}{x-6}}$
34. $f(-0.75) = 3x^2 + 5x - \frac{75}{x}$
35. $g\left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{2x}{3}\right)^3 - 4x^2 + 2x$

$Dadas\ las\ funciones$: $\boldsymbol{f(x)=3x+1}$; $\boldsymbol{g(x)=x^2-2}$; $\boldsymbol{h(x)=\frac{1}{x+1}}$ $\boldsymbol{p(x)=2x^2}$ Determinar:

36. $(\boldsymbol{g\circ f})(\boldsymbol{x})$
37. $(\boldsymbol{h\circ f})(\boldsymbol{x})$
38. $(\boldsymbol{h\circ h})(\boldsymbol{x})$
39. $(\boldsymbol{p\circ h})(\boldsymbol{x})$
40. $(\boldsymbol{p\circ h})(\boldsymbol{x})$

Interpretación de datos

Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{16-x^2}$; $g(x)=3x^2-4\ y\ h(x)=\sqrt[3]{x^3-64}$ determine el dominio de las siguientes operaciones entre funciones:

41. $F(x)=f(x)-g(x)$
42. $F(x)=\frac{f(x)}{h(x)}$
43. $F(x)=h(x)*g(x)$
44. $F(x)=g(x)+f(x)*h(x)$
45. $F(x)=\frac{f(x)}{h(x)}+g(x)$

Dada una función compuesta exprésela de la forma $\boldsymbol{f\circ g}$**:**

46. $\boldsymbol{F(x)=\left(2x+x^2\right)^4}$
47. $\boldsymbol{F(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}$
48. $\boldsymbol{F(t)=\sqrt{Cos\ t}}$
49. $\boldsymbol{F(x)=\sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}}$

Dada una función compuesta exprésela de la forma $f\circ g\circ h$:

50. $\boldsymbol{F(x)=\sqrt[8]{2+|x|}}$
51. $\boldsymbol{F(x)=|ln(x-2)|}$
52. $\boldsymbol{F(x)=\frac{(x+3)^2}{(x+3)^2+3}}$
53. $\boldsymbol{F(x)=1-3^{x^2}}$

Función lineal. Expresa como función la línea recta cuya pendiente se proporciona además de uno de los puntos de su gráfica o su posición con respecto a una recta:

54. Tiene $m=\frac{3}{2}$ y pasa por el punto $A(-2,3)$

55. Pasa por el punto $P(3,3)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $Q(4,5)$ y $R(10,\sqrt{12})$

56. Pasa por el origen y es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(\sqrt{5},\sqrt{5})$ y $B(-4,\sqrt{5})$

57. Pasa por el punto $C(3,8)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $D(5,5)$ y $E\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

58. Pasa por el punto $A\left(0,\frac{5}{4}\right)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $x-3y=6$

Función Cuadrática. Dada la función cuadrática determina las coordenadas de su vértice:

59. $\boldsymbol{f(x) = (x - 1)^2 + 2}$
60. $\boldsymbol{f(x) = 3(x - 1)^2 - 1}$
61. $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 7x - 18}$
62. $\boldsymbol{f(x) = 2(x + 1)^2 + 4}$
63. $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 12x - 5}$

Función valor absoluto. Dada la función realiza un dibujo aproximado de ella y responde al cuestionamiento:

64. $\boldsymbol{f(x) = |x^2 - 5x + 6|}$ *¿Cuáles son las coordenadas de su vértice?*
65. $\boldsymbol{f(x) = |-x^2 + 5x - 4|}$ *¿Cuáles son las coordenadas de su vértice?*
66. $\boldsymbol{f(x) = |x^2 - 4x + 3|}$ *¿Cuáles son las coordenadas de su vértice?*
67. $\boldsymbol{f(x) = |3x| - 3x}$ *¿Cuáles son las coordenadas de su vértice?*
68. $\boldsymbol{f(x) = \frac{|2x|}{2x}}$ *¿Cuáles son las coordenadas de su vértice?*