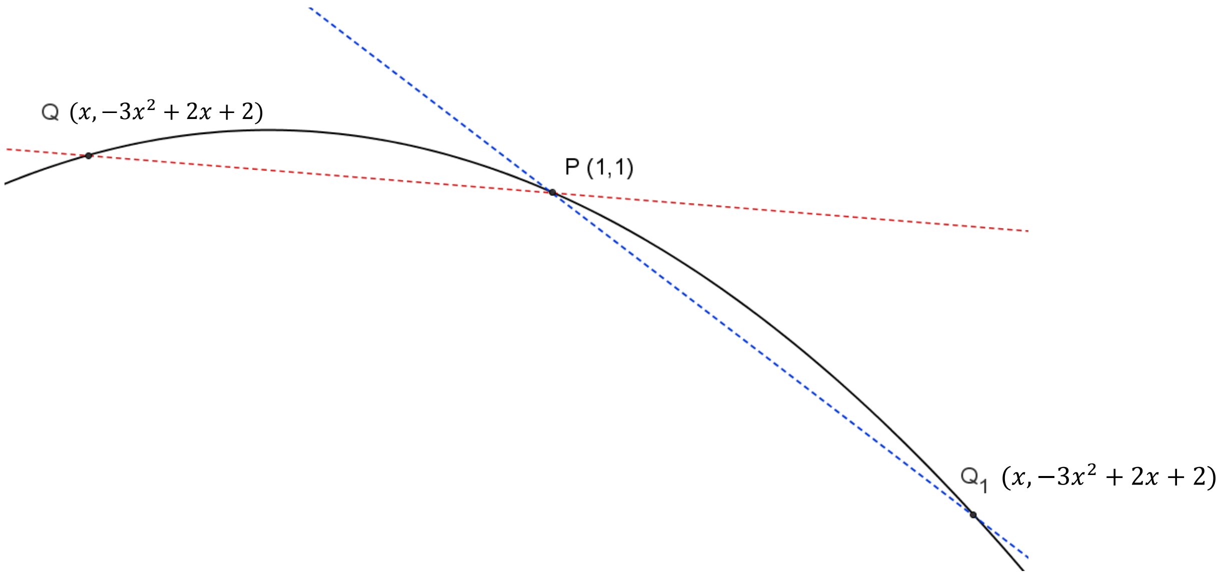
UNIDAD 2 LÍMITES Y CONTINUIDAD

DEFINICIÓN

El ***límite de una función*** es un concepto fundamental del cálculo diferencial. Informalmente, el hecho de que una función *f* tiene un límite *L* en el punto *P*, significa que el valor de *f* puede ser tan cercano a *L* como se desee, tomando puntos suficientemente cercanos a *P*.

Para comprender su esencia determinemos la pendiente de las líneas secantes a la curva y analicemos esta situación:



Consideremos el punto *P(1,1)* que pertenece a la curva $-3x^2+2x+2$ y dos puntos *Q* y Q_1 diferentes de *P* pertenecientes a la curva. La pendiente de la recta secante está definida por:

$$m_{PQ} = \frac{[-3x^2+2x+2]-1}{x-1} = \frac{-3x^2+2x+1}{x-1}$$

Observamos en la gráfica que $x \neq 1$ puesto que *Q* y Q_1 no son iguales a *P*, en el primer caso $x < 1$, en segundo $x > 1$. Las tablas siguientes nos ilustran acerca de los valores que va tomando la función a medida que la variable independiente se acerca al valor de *P:*

x	0	0.25	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	0.9999
$f(x)=\dfrac{-3x^2+2x+1}{x-1}$	-1	-1.75	-2.5	-3.25	-3.7	-3.97	-3.997	-3.9997

x	2	1.75	1.5	1.25	1.1	1.01	1.001	1.0001
$f(x)=\dfrac{-3x^2+2x+1}{x-1}$	-7	-6.25	-5.5	-4.75	-4.3	-4.03	-4.003	-4.0003

En las dos tablas se puede deducir que mientras la variable independiente varía ± 0.0001, la función varía ± 0.0003, que cuando x varía ± 0.001 la función varía ± 0.003 y que cuando la variable independiente varía ± 0.01, la función varía ± 0.03, en otras palabras podemos afirmar que podemos hacer que el valor de la función se aproxime tanto a -4 como deseemos haciendo que el valor absoluto de la diferencia entre x y 1 sea muy pequeña pero que nunca $f(x)$ será igual a -4.

La notación de límite correspondiente a la situación anterior es

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -4$$

Para recordar:

Escribimos $\underset{x \to c}{Lím}\, f(x) = L$

y leemos "el límite de *f(x)* cuando *x* tiende a *c*, es igual a *L*"

si podemos acercar los valores de *f(x)* a *L* (tanto como se quiera) escogiendo una *x* muy cercana a *c*, pero no igual a *c*

VER EJEMPLO

UNIDAD 2 LÍMITES Y CONTINUIDAD

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Supongamos que *b* y *c* son números reales, que *n* es un número entero positivo y que *f* y *g* son funciones. En l siguiente cuadro se resumen las propiedades de los límites:

PROPIEDAD	EJEMPLO
$\lim_{x\to c} b = b$ *el límite de una constante, es la misma constante*	$\lim_{x\to 3} 7 = 7$
$\lim_{x\to c} x = c$	$\lim_{x\to 2} x = 2$
$\lim_{x\to c} x^n = c^n$	$\lim_{x\to -5} x^3 = (-5)^3 = -125$
$\lim_{x\to c} x = \left[bf(x)\right] = b\lim_{x\to c} f(x)$	$\lim_{x\to 3} 2x^2 = 2\lim_{x\to 3} x^2 = 2(3)^2 = 18$
$\lim_{x\to c}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$	$\lim_{x\to -2}\left(x^2+2x-1\right) = \lim_{x\to -2} x^2 + 2\lim_{x\to -2} x - \lim_{x\to -2} 1$ $= (-2)^2 + 2(-2) - 1 = -1$
$\lim_{x\to c}\left[f(x).g(x)\right] = \lim_{x\to c} f(x).\lim_{x\to c} g(x)$	$\lim_{x\to 1}\left[(3x-1)(x^2+4)\right] = \lim_{x\to 1}(3x-1).\lim_{x\to 1}(x^2+4)$ $= \left(3\lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 1\right).\left(\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 4\right)$ $= (3.1-1)(1^2+4) = 10$
$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$	$\lim_{x\to -1}\frac{3x}{x^2+2} = \frac{3\lim_{x\to -1} x}{\lim_{x\to -1} x^2 + \lim_{x\to -1} 2} = \frac{3.(-1)}{(-1)^2+2} = -1$

$\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ $\lim\limits_{x\to c} \left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$	$\lim\limits_{x\to 2} \sqrt[3]{4x^3+5x^2+12} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 2}\left(4x^3+5x^2+12\right)}$ $= \sqrt[3]{4\lim\limits_{x\to 2} x^3 + 5\lim\limits_{x\to 2} x^2 + \lim\limits_{x\to 2} 12}$ $= \sqrt[3]{4(2)^3+5(2)^2+12} = \sqrt[3]{64} = 4$
Si *f* es un polinomio o una función racional y *c* está en el dominio de *f*, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+3}{x^2+1} = \frac{0+3}{0^2+1} = 3$

EJEMPLO: Límite de una función trigonométrica

UNIDAD 2 LÍMITES Y CONTINUIDAD

LÍMITES LATERALES

LÍMITE POR LA DERECHA

Supongamos que la función *f* está definida en el intervalo (*c*,*b*) inmediatamente a la derecha de *c*.
Escribimos $\lim\limits_{x\to c^{+}} f(x) = L$ para indicar que cuando *x* se acerca a *c* por la derecha de *c* (es decir, tomando valores mayores que *c*) las imágenes de *f* se acercan mucho a *L.*

LÍMITE POR LA IZQUIERDA

Supongamos que *f* está definida en el intervalo (*a*,*c*) inmediatamente a la izquierda de *c.*
Escribimos $\lim\limits_{x\to c^{-}} f(x) = L$ para indicar que cuando *x* se acerca a *c* por la izquierda de *c* (tomando valores menores que *c*) las imágenes de *f* se acercan mucho a *L*.

TEOREMA

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{x\to c^{-}} f(x) = L = \lim_{x\to c^{+}} f(x)$$

EJEMPLO: Calcular $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

Primero consideremos la función escrita de una manera equivalente sin usar valor absoluto:

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-2} & si \;\; x-2 > 0 \\ \dfrac{-(x-2)}{x-2} & si \;\; x-2 < 0 \end{cases}$$

Esta función equivale a $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} 1 & si \;\; x > 2 \\ -1 & si \;\; x < 2 \end{cases}$

Por lo tanto:

$$\underset{x\to 2^+}{lím}\frac{|x-2|}{x-2}=\underset{x\to 2^+}{lím}\,1=1 \quad \text{y} \quad \underset{x\to 2^-}{lím}\frac{|x-2|}{x-2}=\underset{x\to 2^-}{lím}\,(-1)=-1$$

$\therefore \underset{x\to 2}{lím}\frac{|x-2|}{x-2}$ NO EXISTE

EJEMPLO: Calcular $\underset{x\to 2}{lím}\, f(x)$ si $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6, & x<2 \\ -x^2+4x-2, & x\geq 2 \end{cases}$

Calculemos los límites laterales:

$$\underset{x\to 2^-}{lím}\, f(x)=\underset{x\to 2^-}{lím}\left(x^2-4x+6\right)=2$$

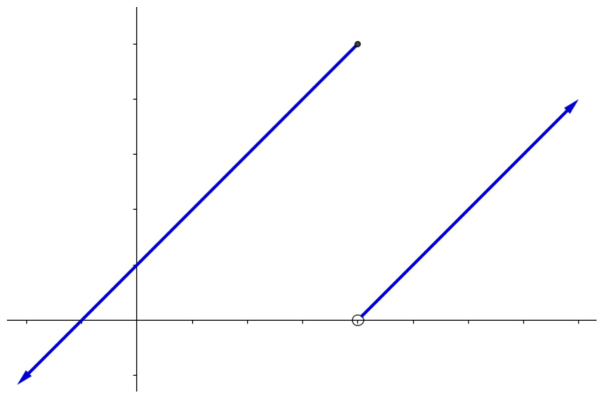
$$\underset{x\to 2^+}{lím}\, f(x)=\underset{x\to 2^+}{lím}\left(-x^2+4x-2\right)=2$$

Por lo tanto $\underset{x\to 2}{lím}\, f(x)$ existe y es igual a 2

EJEMPLO: Veamos lo que sucede con la siguiente función cuando analizamos su límite en una vecindad de 4:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x\leq 4 \\ x-4 & si\ x>4 \end{cases}$$

La gráfica de la función es:



Analicemos la función en la proximidad de $x=4$

$$\lim_{x\to 4^-}(x+1)=5 \qquad y \qquad \lim_{x\to 4^+}(x-4)=0$$

Como los límites laterales son diferentes, entonces $\lim_{x \to 4} f(x)$ no existe.

EJEMPLO: Determinemos el valor de k para que exista el límite en la función definida a continuación, cuando x se acerca a 1:

$$f(x) = \begin{cases} x + 8 & si \;\; x < 1 \\ \dfrac{2kx^2 + 7}{3x - 4} & si \;\; x > 1 \end{cases}$$

Para que el límite exista se requiere que los límites laterales sean iguales, esto es:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2kx^2 + 7}{3x - 4} = \lim_{x \to 1}(x + 8)$$

Lo que equivale a tener:

$$\frac{2k + 7}{-1} = 9 \;\Rightarrow 2k + 7 = -9 \;\; \Rightarrow 2k = -16 \;\; \Rightarrow k = -8$$

Con lo que se puede establecer que el $\underset{x \to 1}{lím}\, f(x)$ existe cuando k= - 8.